Prof. Dr. Holger Stark, Arne Zantop, Josua Grawitter
Isaac Tesfaye, Jonah Friederich, Lasse Ermoneit, Philip Knospe

9. Übungsblatt – Mathematische Methoden der Physik

Termine: **S** **Abgabe bis Mittwoch, 19.06.2019, 18 Uhr im Briefkasten am ER-Eingang**
M **Vorrechnen in den Tutorien 11.06. – 14.06.2019**

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte. Bitte die Matrikelnummern auf dem Aufgabenzettel angeben. Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

M **Aufgabe 29 (2 Punkte)**: *Vektorfelder, Zylinderkoordinaten (mündlich)*
Geben Sie die folgenden *Vektorfelder* $\underline{v}_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ in Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) an

(a) $\underline{v}_1(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(\beta x - \alpha y)\underline{e}_x + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(\alpha x + \beta y)\underline{e}_y + \gamma \underline{e}_z$

(b) $\underline{v}_2(x, y, z) = \alpha \underline{e}_x + \alpha \underline{e}_y + \gamma \underline{e}_z$.

Hinweis: Wechseln Sie hierbei auch von der kartesischen Basis $\{\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z\}$ in die Basis der Zylinderkoordinaten $\{\underline{e}_\rho, \underline{e}_\varphi, \underline{e}_z\}$.

M **Aufgabe 30 (2 Punkte)**: *Jacobi-Matrix und Funktionaldeterminante (mündlich)*
Es sei eine Koordinatentransformation zwischen kartesischen Koordinaten $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$ und anderen Koordinaten (x'_1, x'_2, x'_3) gegeben:

$$x_1 = x_1(x'_1, x'_2, x'_3), \qquad x_2 = x_2(x'_1, x'_2, x'_3), \qquad x_3 = x_3(x'_1, x'_2, x'_3).$$

Die Einträge der sogenannten Jacobi-Matrix $\underline{\underline{F}}$ sind definiert als

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial x'_j} \quad \text{mit} \quad i, j = 1, 2, 3$$

und die Funktionaldeterminante ist gegeben durch $\det(\underline{\underline{F}})$. Berechnen Sie die Jacobi-Matrix und die Funktionaldeterminante für

(a) Zylinderkoordinaten $(x'_1, x'_2, x'_3) = (\rho, \varphi, z)$ und

(b) Kugelkoordinaten $(x'_1, x'_2, x'_3) = (r, \vartheta, \varphi)$.

S **Aufgabe 31 (10 Punkte):** *Bewegung im Schwerefeld (schriftlich) (2+3+2+3 Punkte)*
Gegeben sei die Flugbahn eines Teilchens auf der Erde

$$\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x t \\ 0 \\ v_z t - \frac{1}{2} g t^2 \end{pmatrix},$$

wobei $v_x, v_z \geq 0$ die anfänglichen Geschwindigkeitskomponenten in x- bzw. z-Richtung sind, $g > 0$ die Fallbeschleunigung ist, und t die Zeit bezeichnet.

(a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit $\underline{v} = \dot{\underline{r}}$ und die Beschleunigung $\underline{a} = \dot{\underline{v}} = \ddot{\underline{r}}$.

(b) Berechnen Sie die Weglänge $s(t)$ für den Fall $v_z = 0$. Was passiert für $v_x \to 0$?
Hinweis: Nutzen Sie zur Berechnung des Integrals eine Integraltafel, oder lösen Sie das auftretende Integral durch geeignete Substitution mit $\sinh(x)$.

(c) Parametrisieren Sie $\underline{r}$ durch den in x-Richtung zurückgelegten Weg, d.h. bestimmen Sie $z(x)$, so dass $\underline{r}(x) = (x, 0, z(x))$. *Zur Kontrolle:* $z(x)$ ist ein Polynom zweiten Grades.

Bitte Rückseite beachten!⟶

(d) Wir verlegen nun den Koordinatenursprung in den Brennpunkt der Parabel, die $z(x)$ beschreibt. So kann die Parabel in der Form

$$\tilde{y} = 0, \qquad \tilde{z} = A\tilde{x}^2 - \frac{1}{4A}$$

dargestellt werden. Geben Sie die notwendige Koordinatentransformation (Verschiebung des Koordinatenursprungs) an und bestimmen Sie A. Stellen Sie die Parabel in Kugelkoordinaten dar, d.h. berechnen Sie $r(\vartheta)$ für die Bahn.

S Aufgabe 32 (10 Punkte): *Vollständiges Differential (schriftlich) (6+4 Punkte)*
Das *vollständige Differential* $\mathrm{d}f$ einer Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ lautet (mit Summenkonvention)

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_i$$

(a) Berechnen Sie das vollständige Differential der folgenden Skalarfelder $\phi_i : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$\phi_1(x,y,z) = -\frac{\gamma}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \qquad \phi_2(x,y,z) = -\gamma \ln(\sqrt{x^2+y^2}),$$

$$\phi_3(x,y,z) = x, \quad \text{und} \qquad \phi_4(x,y,z) = \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 + \left(\frac{z}{b}\right)^2} \quad .$$

(b) Bilden Sie das vollständige Differential des Skalarfeldes

$$U(x,y,t) = x + \cos(\omega t)\mathrm{e}^{-ay}\,.$$

Berechnen Sie nun die *totale Zeitableitung* von U entlang der Bahnkurve

$$\underline{r}(t) = a\left[\sin(\omega t)\,\underline{e}_x + \frac{t}{t_\mathrm{c}}\,\underline{e}_y\right],$$

also

$$\frac{\mathrm{d}U(\underline{r}(t),t)}{\mathrm{d}t}.$$

Diskutieren Sie den Fall $t \gg t_\mathrm{c}$, für $a > 0$, indem Sie den Grenzwert $t_\mathrm{c} \to 0$ nehmen.

Sprechzeiten:	Prof. Dr. Holger Stark	Fr	11:30 – 12:30 Uhr	EW 709
	Jonah Friederich	Mo	13:00 – 14:00 Uhr	EW 060
	Arne Zantop	Mo	16:00 – 17:00 Uhr	EW 701
	Josua Grawitter	Mo	16:00 – 17:00 Uhr	EW 701
	Isaac Tesfaye	Mi	15:00 – 16:00 Uhr	EW 060
	Philip Knospe	Do	15:00 – 16:00 Uhr	EW 060
	Lasse Ermoneit	Fr	15:00 – 16:00 Uhr	EW 060

Vorlesung:
- Donnerstag 8:15 Uhr – 9:45 Uhr in EW 201

Webseite:
- Details zur Vorlesung, Vorlesungsmitschrift und aktuelle Informationen sowie Sprechzeiten auf der Webseite unter `https://www.tu-berlin.de/?203636`