Prof. Dr. Kathy Lüdge
Dr. Alexander Carmele

5. Übungsblatt – Theoretische Festkörperphysik I,II

Abgabe: Mo. 27.05.2019 zum Vorlesungsbeginn

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 9 (30 Punkte): *Polaritonen II*

Ausgehend von der Lagrangedichte eines mechanischen Systems und seiner relativen Schwingungsmoden $\mathbf{u}_t$ mittels der Federkonstantendichte $f/2$, das über ein Dipolmoment $\mathbf{d} = q\mathbf{u}_t$ an das transversale elektrische Feld $\mathbf{E}_t = -\dot{\mathbf{A}}$ und dessen Energiedichte koppelt:

$$L = \int d^3r \left[\frac{\epsilon_0}{2} \left(\dot{\mathbf{A}} \right)^2 - \frac{1}{2\mu_0} \left(\nabla \times \mathbf{A} \right)^2 + \frac{\rho_m}{2} \dot{\mathbf{u}}_t^2 - \frac{f}{2} \mathbf{u}_t^2 + \rho_0 \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{E}_t \right]$$

soll die Dispersionsrelation von transversalen Polaritonen hergeleitet werden.

1. Führen Sie zuerst eine Legendretransformation durch und leiten Sie den entsprechenden Hamilton-Operator her:

$$\mathcal{H}_t = \frac{\mathbf{\Pi}^2}{2\epsilon_0} + \frac{1}{2\mu_0} \left(\nabla \times \mathbf{A} \right)^2 + \frac{p^2}{2\rho_m} + \frac{1}{2} \left(f + \rho_0^2/\epsilon_0 \right) \mathbf{u}_t^2 + \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{\Pi} \qquad .$$

2. Setzen Sie folgende Entwicklungen nach Moden für die mechanischen und elektromagnetischen Felder an:

$$(1) \qquad \mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum\nolimits_{\mathbf{k},\lambda} \mathbf{e}_{\mathbf{k},\lambda} a_{\mathbf{k},\lambda} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \qquad \mathbf{\Pi} = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum\nolimits_{\mathbf{k},\lambda} \mathbf{e}_{\mathbf{k},\lambda} \pi_{\mathbf{k},\lambda} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

$$(2) \qquad \mathbf{u}_t = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum\nolimits_{\mathbf{k},\lambda} \mathbf{e}_{\mathbf{k},\lambda} u_{\mathbf{k},\lambda} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \qquad \mathbf{p} = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum\nolimits_{\mathbf{k},\lambda} \mathbf{e}_{\mathbf{k},\lambda} p_{\mathbf{k},\lambda} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

mit $\mathbf{e}_{\mathbf{k},\lambda} \cdot \mathbf{e}_{\pm\mathbf{k},\lambda'} = \delta_{\lambda'\lambda}$ und bringen Sie die Hamiltonfunktion in die Form:

$$H_t = \sum_{\mathbf{k},\lambda} \left[\frac{\pi_{\mathbf{k},\lambda}\pi_{-\mathbf{k},\lambda}}{2\epsilon_0} + \frac{\omega_{\mathbf{k}}^2 \epsilon_0}{2} a_{\mathbf{k},\lambda} a_{-\mathbf{k},\lambda} + \frac{p_{\mathbf{k},\lambda} p_{-\mathbf{k},\lambda}}{2\rho_m} + \frac{\omega_l^2 \rho_m}{2} u_{\mathbf{k},\lambda} u_{-\mathbf{k},\lambda} + \frac{\rho_0}{\epsilon_0} u_{\mathbf{k},\lambda} \pi_{-\mathbf{k},\lambda} \right].$$

Geben Sie explizit $\omega_{\mathbf{k}}$ und ω_l an.

3. Führen Sie eine Quantisierung der mechanischen und elektromagnetischen Felder in Analogie zum harmonischen Oszillator durch. Verwenden Sie die kanonische Vertauschungsrelation, $[p_{-\mathbf{k},\lambda}, u_{\mathbf{k}',\lambda'}] = -i\hbar\delta_{\lambda\lambda'}\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ und $[\pi_{-\mathbf{k},\lambda}, a_{\mathbf{k}',\lambda'}] = -i\hbar\delta_{\lambda\lambda'}\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$. Das Ergebnis lautet:

$$H_t = \hbar \sum_{\mathbf{k},\lambda} \left[\omega_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger c_{\mathbf{k},\lambda} + \omega_l b_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger b_{\mathbf{k},\lambda} + M_{\mathbf{k}} \left(b_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger + b_{-\mathbf{k},\lambda} \right) \left(c_{-\mathbf{k},\lambda}^\dagger - c_{\mathbf{k},\lambda} \right) \right] + C.$$

Geben Sie M_k und C explizit an.

4. Um die Eigenmoden der transversalen Polaritonen zu finden, suchen wir einen Operator, der die folgende Gleichung erfüllt: $[H_t, \alpha_{\mathbf{k}}] = \hbar\omega_{\mathbf{k}}^p \alpha_{\mathbf{k}}$ mit $\alpha_{\mathbf{k}} = wc_{\mathbf{k}}^\dagger + xb_{\mathbf{k}}^\dagger + yc_{-\mathbf{k}} + zb_{-\mathbf{k}}$ (ignorieren sie im folgenden den Polarisationsindex λ). Um den Eigenwert zu finden, führen Sie einen Koeffizientenvergleich in w, x, y, z durch und berechnen Sie die Determinante einer 4x4-Matrix. Die Lösung ergibt die gesuchte Dispersionsrelation:

$$(\omega_{\mathbf{k}}^p)^2 = \frac{1}{2} \left[\omega_l^2 + \omega_{\mathbf{k}}^2 \pm \sqrt{(\omega_l^2 + \omega_{\mathbf{k}}^2)^2 - 4\omega_{\mathbf{k}}^2(\omega_l^2 + \omega_{pl}^2)} \right].$$

Geben Sie ω_{pl}^2 an.

Vorlesung:

- Montags 10–12 Uhr im EW 202
- Mittwochs 10–12 Uhr im EW 202

Übungen:

- Mi 16–18 Uhr im EW 229

Scheinkriterien:

- Mindestens 60% der Übungspunkte
- Regelmäßige und aktive Teilnahme in den Übungen

Literatur zur Lehrveranstaltung:

- Ashcroft, Mermin, *Festkörperphysik* (Oldenbourg)
- Kittel, *Quantentheorie der Festkörper* (Oldenbourg)
- Czycholl, *Theoretische Festkörperphysik* (Springer)
- Ibach, Lüth, *Festkörperphysik* (Springer)
- Jäger, Valenta, *Festkörpertheorie* (Wiley)
- U. Rössler, *Solid State Theory* (Springer)
- Haug, Koch, *Quantum Theory of the Optical and Electronic Properties of Semiconductors* (World Scientific)
- Haken, *Quantenfeldtheorie des Festkörpers* (Teubner)
- Scherz, *Quantenmechanik* (Teubner)

Sprechzeiten:

Name	Tag	Zeit	Raum
Prof. Dr. K. Lüdge	Mi	13-14 Uhr	EW 741
Dr. A. Carmele	Di	11-12 Uhr	EW 704

Hinweise:

Die Übungsblätter werden in der Regel am Montag in der Vorlesung ausgegeben. Die Abgabe erfolgt dann 14 Tage später Montags zu Vorlesungsbeginn.