Prof. Dr. Kathy Lüdge
Dr. Alexander Carmele

8. Übungsblatt – Theoretische Festkörperphysik I,II

Abgabe: Mo. 24.06.2019 zum Vorlesungsbeginn

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 12 (30 Punkte): *Independent Boson Model*

Eines der wichtigsten und exakt-lösbaren Dissipationsmodelle der Vielteilchenphysik ist die Kopplung über das Matrixelement g_q eines Spins mit Frequenz ω_0 an ein Reservoir unabhängiger Bosonen mit Frequenzen ω_q und Vertauschungsrelation $[b_q^\dagger, b_{q'}] = -\delta_{qq'}$. Der Hamilton-Operator des Systems lautet:

$$H = \hbar\omega_0|1\rangle\langle 1| + \hbar|1\rangle\langle 1|X + \hbar\sum_q \omega_q b_q^\dagger b_q, \qquad X := \sum_q g_q\left(b_q^\dagger + b_q\right). \tag{1}$$

Wir starten mit der Liouville-von Neumann Gleichung $i\hbar\dot\rho = [H,\rho]$. Gehen Sie wie folgt vor:

1. Gehen Sie ins Wechselwirkungsbild $\rho(t) = U(t,0)\rho_I(t)U^\dagger(t,0)$ mit folgender unitärer Transformation: $U(t,0) = \exp[-i\left(\omega_0|1\rangle\langle 1| + \sum_q \omega_q b_q^\dagger b_q\right)t]$. Wie lautet die Liouville-von Neumann Gleichung im Wechselwirkungsbild? Zeigen Sie, dass der Hamilton-Operator im Wechselwirkungsbild lautet: $H_I(t) = \hbar\sigma_{11}X(t)$. Geben Sie $X(t)$ explizit an!

2. Stellen Sie die Gleichung für die Übergangswahrscheinlichkeitsamplitude $\langle 1|\rho_I(t)|0\rangle := P(t)$ auf! Wie würde die Lösung lauten, wenn $X(t)$ kein Operator wäre?

3. Nehmen Sie ein finites Zeitinkrement Δt an und stellen Sie eine Gleichung für $P(\Delta t)$ auf, indem Sie den Differentialquotienten explizit ausschreiben. Zeigen Sie, dass die Gleichung für $P(N\Delta t)$ wie folgt lautet:

$$P(N\Delta t) = e^{-iX((N-1)\Delta t)\Delta t}e^{-iX((N-2)\Delta t)\Delta t}\cdots e^{-iX(\Delta t)\Delta t}e^{-iX(0)\Delta t}P(0), \tag{2}$$

wenn Δt klein genug gewählt wird.

4. Berechnen Sie nun den Kommutator von $[X((n+1)\Delta t), X(n\Delta t)]$. Welche Bedingungen an die Operatoren A, B müssen für die Baker-Campbell-Hausdorff Formel $\exp[A]\exp[B] = \exp[A+B]\exp[[A,B]/2]$ erfüllt sein?

5. Nutzen Sie nun die Baker-Campbell-Hausdorff-Formel, um die ersten drei Exponenten in der Gleichung für $P(N\Delta t)$ zusammenzufassen. Zeigen Sie also, dass

$$P(3\Delta t) = \exp\left[-i\Delta t\sum_{n=0}^{2} X(n\Delta t) - (\Delta t)^2\sum_{n=1}^{2}\sum_{m=0}^{n-1}[X(n\Delta t), X(m\Delta t)]/2\right]P(0). \tag{3}$$

Wie lautet die Gleichung für $P(N\Delta t)$?

6. In der Übung wird mittels des Wickschen Theorems gezeigt, dass

$$\langle e^{-i\int_0^t X(t')dt'}\rangle = \exp[-\sum_q (g_q/\omega_q)^2(2n_q+1)(1-\cos\omega_q t)]. \tag{4}$$

Zeigen Sie nun mit den Ergebnissen aus 4. und 5. für hinreichend kleine Δt, dass

$$\begin{aligned}\langle P(t)\rangle &= \left\langle \exp[-i\int_0^t X(t')dt']\right\rangle \left\langle \exp[-\int_0^t\int_0^{t_1}[X(t_1), X(t_2)]dt_1 dt_2/2]\right\rangle \\ &= \exp\left[i\Delta_p t - \sum_q (g_q/\omega_q)^2\left((2n_q+1)(1-\cos(\omega_q t)) + i\sin(\omega_q t)\right)\right]\langle P(0)\rangle. \end{aligned}\tag{5}$$

Werten Sie die Gleichung für $t=0$ aus! Geben Sie Δ_p explizit an!

Vorlesung:	• Montags 10–12 Uhr im EW 202 • Mittwochs 10–12 Uhr im EW 202
Übungen:	• Mi 16–18 Uhr im EW 229
Scheinkriterien:	• Mindestens 60% der Übungspunkte • Regelmäßige und aktive Teilnahme in den Übungen

Literatur zur Lehrveranstaltung:

- Ashcroft, Mermin, *Festkörperphysik* (Oldenbourg)
- Kittel, *Quantentheorie der Festkörper* (Oldenbourg)
- Czycholl, *Theoretische Festkörperphysik* (Springer)
- Ibach, Lüth, *Festkörperphysik* (Springer)
- Jäger, Valenta, *Festkörpertheorie* (Wiley)
- U. Rössler, *Solid State Theory* (Springer)
- Haug, Koch, *Quantum Theory of the Optical and Electronic Properties of Semiconductors* (World Scientific)
- Haken, *Quantenfeldtheorie des Festkörpers* (Teubner)
- Scherz, *Quantenmechanik* (Teubner)

Sprechzeiten:

Name	Tag	Zeit	Raum
Prof. Dr. K. Lüdge	Mi	13-14 Uhr	EW 741
Dr. A. Carmele	Di	11-12 Uhr	EW 704

Hinweise:

Die Übungsblätter werden in der Regel am Montag in der Vorlesung ausgegeben. Die Abgabe erfolgt dann 14 Tage später Montags zu Vorlesungsbeginn.