Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik

Prof. Dr. Andreas Knorr
Dr. Marten Richter, Dr. Malte Selig, Maximilian Seyrich
Robert Salzwedel, Philipp Stammer

3. Übungsblatt – Theoretische Physik II: Quantenmechanik

Abgabe: Mi. 08. Mai 2019 vor der Vorlesung im Hörsaal EW 202

Bei der Bepunktung wird Wert gelegt auf **ausführliche Zwischenschritte** *und* **Kommentare** *zur Lösungsstrategie. Die Abgabe erfolgt in Dreiergruppen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium an! Elektronische, gedruckte oder kopierte Abgaben (Ausnahme Numerikaufgaben) sind nicht zugelassen.*

Aufgabe 1 (20 Punkte): *Zeitdynamik der Wellenfunktion unter externen Feldern: Rabioszillationen im Zwei-Zustands-System*

In dieser Aufgabe wird ein Zwei-Zustands-System mit Ankopplung an ein externes zeitlich veränderliches elektrisches Feld diskutiert. Dazu sei zunächst der Hamilton Operator

$$H = \underbrace{-\frac{\hbar^2\Delta}{2m} + V(\mathbf{r})}_{H_0} - e\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}(t) \tag{1}$$

gegeben. Dabei bezeichnet H_0 den Hamilton Operator des zeitunabhängigen Problems wobei $V(\mathbf{r})$ ein externes Potential für ein Elektron ist. Der dritte Term bezeichnet die Dipol-Kopplung des Elektrons an ein äußeres elektrisches Feld $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0(e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t})$. Ferner sei die Lösung des zeitunabhängigen Problems

$$H_0\varphi_n(\mathbf{r}) = \hbar\omega_n\varphi_n(\mathbf{r}) \tag{2}$$

bekannt, wobei $\hbar\omega_n$ die Eigenwerte und $\varphi_n(\mathbf{r})$ die Eigenzustände bezeichnen. Die Eigenzustände bilden ein vollständiges Orthonormalsystem.

(a) Entwickeln Sie für die Schrödinger Gleichung des Gesamtsystems $i\hbar\partial_t\Psi(\mathbf{r},t) = H\Psi(\mathbf{r},t)$ die Wellenfunktion nach den Lösungen des zeitunabhängigen Problems $\Psi(\mathbf{r},t) = \sum_n c_n(t)\varphi_n(\mathbf{r})$. Hier bezeichnen $c_n(t)$ die Entwicklungskoeffizienten. Zeigen Sie, dass die Entwicklungskoeffizienten c_n der Bewegungsgleichung

$$i\hbar\partial_t c_m(t) = \hbar\omega_m c_m(t) + \sum_{n\neq m} \mathbf{d}_{mn}\cdot\mathbf{E}(t)c_n(t) \tag{3}$$

mit dem Dipolelement $\mathbf{d}_{mn} = -e\int_{\mathbb{R}^3} d^3r\varphi_m^*(\mathbf{r})\mathbf{r}\varphi_n(\mathbf{r})$ genügen. Argumentieren Sie am Beispiel des Kastenpotentials (Übungsblatt 2), warum $\mathbf{d}_{mn}$ nur für $m \neq n$ ungleich null ist, wenn der Koordinatenursprung in der Mitte des Kastens liegt.

(b) Reduzieren Sie das Problem auf ein Zwei-Zustands-System und schreiben Sie die entsprechenden Bewegungsgleichungen für $c_1(t)$ und $c_2(t)$ auf. Überführen Sie das Gleichungssystem in den sogenannten rotierten Rahmen, indem sie die Ersetzung $c_n(t) = \tilde{c}_n(t)e^{-i\omega_n t}$ vornehmen, und so die relevante und die schnell oszillierende (sich zu Null mittelnde) Zeitdynamik in den Bewegungsgleichungen trennen. **Rückseite beachten!**

Unter der Annahme resonanter Anregung $\omega_0 = \omega_2 - \omega_1$ lässt sich das Gleichungssystem dann schreiben als

$$i\hbar\partial_t \tilde{c}_1(t) = \mathbf{d}_{12} \cdot \mathbf{E}_0(1 + e^{-2i(\omega_2-\omega_1)t})\tilde{c_2}(t), \tag{4}$$

$$i\hbar\partial_t \tilde{c}_2(t) = \mathbf{d}_{21} \cdot \mathbf{E}_0(e^{2i(\omega_2-\omega_1)t} + 1)\tilde{c_1}(t). \tag{5}$$

Im folgenden dürfen die schnell oszillierenden Exponentialfaktoren vernachlässigt werden, was als Rotating Wave Approximation bezeichnet wird.

(c) Lösen Sie das Gleichungssystem für $\tilde{c}_1(t)$ und $\tilde{c}_2(t)$ mit den Anfangsbedingungen $\tilde{c}_1(0) = 1$ und $\tilde{c}_2(0) = 0$. Berechnen Sie damit, wie sich $|c_1(t)|^2$ und $|c_2(t)|^2$ zeitlich entwickeln. Plotten (z.B. mit Mathematica oder gnuplot) und interpretieren Sie das Ergebnis physikalisch. Berechnen Sie explizit $\int d^3r|\Psi(\mathbf{r},t)|^2$ und interpretieren Sie das Ergebnis?

(d) Berechnen und interpretieren Sie den Erwartungswert des Dipols

$$\mathbf{p} = e\int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi^*(x,t)(x - \frac{L}{2})\Psi(x,t) \tag{6}$$

für die beiden untersten Zustände des Teilchens im unendlich hohen Kasten (Übungsblatt 2) und plotten Sie das Ergebnis (wählen Sie $\omega_2 - \omega_1 = 100\frac{\Omega}{\hbar}$).