Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik

Prof. Dr. Andreas Knorr
Dr. Marten Richter, Dr. Malte Selig, Maximilian Seyrich
Robert Salzwedel, Philipp Stammer

4. Übungsblatt – Theoretische Physik II: Quantenmechanik

Abgabe: Mi. 15. Mai 2019 vor der Vorlesung im Hörsaal EW 202

Bei der Bepunktung wird Wert gelegt auf **ausführliche Zwischenschritte** *und* **Kommentare** *zur Lösungsstrategie. Die Abgabe erfolgt in Dreiergruppen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium an! Elektronische, gedruckte oder kopierte Abgaben (Ausnahme Numerikaufgaben) sind nicht zugelassen.*

Aufgabe 1 (16 Punkte): *Kommutatoren, Operatoren*

(a) Benutzen Sie die Definition des Kommutators, $[A,B] = A\,B - B\,A$, um zu zeigen, dass für drei beliebige Operatoren A, B und C gilt:

  (i) $[A, B\,C] = B[A,C] + [A,B]C$ und $[A\,B, C] = A[B,C] + [A,C]B$,

  (ii) $[A,B]^\dagger = -[A^\dagger, B^\dagger]$.

  Dabei ist $A^\dagger$ der zu A adjungierte Operator.

Betrachten Sie nun die Operatoren

$$T = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}, \quad V = -\frac{\hbar c\,\alpha}{r}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{r} + i\gamma\mathbf{p}, \text{ und } \mathbf{L} = \mathbf{r}\times\mathbf{p} = \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\, r_i\, p_j\, \mathbf{e}_k, \tag{1}$$

mit dem Orts- und Impulsoperator $\mathbf{r}$ und $\mathbf{p}$, mit $[r_i, p_j] = i\hbar\,\delta_{i,j}, [r_i, r_j] = 0, [p_i, p_j] = 0$; den Konstanten m, $\hbar$, c, α und γ; dem Levi-Civita-Symbol ε_{ijk}; und dem Einheitsvektor $\mathbf{e}_k$ in die k-te Raumrichtung.

Ein Operator A heißt hermitesch, falls er für zwei beliebige Wellenfunktionen $\psi(\mathbf{r})$ und $\varphi(\mathbf{r})$ die Relation $\langle\psi, A\varphi\rangle = \langle A\psi, \varphi\rangle$ erfüllt. Dabei ist $\langle\psi,\varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \psi^*(\mathbf{r})\,\varphi(\mathbf{r})\,\mathrm{d}\mathbf{r}$ das Skalarprodukt der Zustände ψ und φ.

(b) Welche der oberen vier Operatoren sind hermitesch? (Überprüfen Sie das durch Rechnung!)

(c) Berechnen Sie die Kommutatoren $[L_i, p_\ell]$, $[L_i, p_\ell^2]$ und $[L_i, \mathbf{p}^2]$. Kommutiert $\mathbf{L}$ mit T?

(d) Berechnen Sie die Kommutatoren $[L_i, r_\ell]$, $[L_i, r_\ell^2]$ und $[L_i, \mathbf{r}^2]$.

(e) Zeigen Sie, dass L_i mit V kommutiert.

(f) Zeigen Sie, dass $\mathbf{L}$ die Kommutator-Algebra $[L_i, L_j] = i\hbar \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} L_k$ erfüllt.