Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik

Prof. Dr. Andreas Knorr
Dr. Marten Richter, Dr. Malte Selig, Maximilian Seyrich
Robert Salzwedel, Philipp Stammer

6. Übungsblatt – Theoretische Physik II: Quantenmechanik

Abgabe: Mi. 29. Mai 2019 vor der Vorlesung im Hörsaal EW 202

Bei der Bepunktung wird Wert gelegt auf **ausführliche Zwischenschritte** *und* **Kommentare** *zur Lösungsstrategie. Die Abgabe erfolgt in Dreiergruppen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium an! Elektronische, gedruckte oder kopierte Abgaben (Ausnahme Numerikaufgaben) sind nicht zugelassen.*

Aufgabe 1 (20 Punkte): *Zum Bahndrehimpuls*
Der Operator des Bahndrehimpuls ergibt sich durch Quantisierung des klassischen Drehimpulses,

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \to \hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}}. \tag{1}$$

(a) Benutzen Sie die Kommutatorrelationen für den Drehimpulsoperator aus Aufgabe 1 (f) vom 4. Übungsblatt um den Kommutator von $\hat{L}_z$ mit $\hat{\mathbf{L}}^2$ zu berechnen.

(b) Verwenden Sie nun explizit die Ortsdarstellung für $\hat{\mathbf{r}}$ und $\hat{\mathbf{p}}$ und zeigen Sie, dass die Komponenten des Operators des Bahndrehimpulses in Kugelkoordinaten durch

$$\hat{L}_x = -i\hbar\Big(-\sin\varphi\,\partial_\vartheta - \frac{\cos\vartheta\cos\varphi}{\sin\vartheta}\,\partial_\varphi\Big), \tag{2}$$

$$\hat{L}_y = -i\hbar\Big(\cos\varphi\,\partial_\vartheta - \frac{\cos\vartheta\sin\varphi}{\sin\vartheta}\,\partial_\varphi\Big) \text{ und} \tag{3}$$

$$\hat{L}_z = -i\hbar\,\partial_\varphi \tag{4}$$

gegeben sind. Stellen Sie dazu zunächst die Ableitungen in kartesischen Koordinaten durch die Ableitungen in Kugelkoordianten dar.

Hinweis: Die Koordinatentransformation ist durch die Jacobi-Matrix

$$\frac{\partial(r,\vartheta,\varphi)}{\partial(x,y,z)} = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & \sin\vartheta\sin\varphi & \cos\vartheta \\ \cos\vartheta\cos\varphi/r & \cos\vartheta\sin\varphi/r & -\sin\vartheta/r \\ -\sin\varphi/(r\sin\vartheta) & \cos\varphi/(r\sin\vartheta) & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

bestimmt.

(c) Benutzen Sie die Ergebnisse aus Aufgabenteil (b) um $\hat{L}_x^2, \hat{L}_y^2, \hat{L}_z^2$ und das Quadrat des Bahndrehimpulses

$$\hat{\mathbf{L}}^2 = -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\,\partial_\vartheta\big(\sin\vartheta\,\partial_\vartheta\big) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\,\partial_\varphi^2\right] \tag{6}$$

zu bestimmen. Hinweis: Es gilt $\partial_\theta^2 + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\partial_\theta = \frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta\ (\sin\theta\ \partial_\theta)$.

Betrachten Sie nun die beiden normierten Wellenfunktionen

$$\psi_1(\mathbf{r}) = f_1(r)\sqrt{\frac{15}{16\pi}}(x^2 + r\gamma z - y^2) \text{ und } \psi_2(\mathbf{r}) = f_2(r)\sqrt{\frac{3}{8\pi}}(x+iy), \text{ mit } \gamma \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

(d) Sind diese Funktionen Eigenfunktionen von $\hat{L}_z$ und $\hat{\mathbf{L}}^2$? Wenn ja, bestimmen Sie die Eigenwerte. Benutzen Sie Kugelkoordinaten und die explizite Darstellung des Drehimpulsoperators im Ortsraum aus den Aufgabenteilen (b) und (c).

(e) Berechnen Sie schließlich die Erwartungswerte von $\hat{L}_z$ und $\hat{\mathbf{L}}^2$ in diesen beiden Zuständen. Für diesen Aufgabenteil können Sie verwenden, dass die Kugelflächenfunktionen Eigenfunktionen von $\hat{\mathbf{L}}^2$ und $\hat{L}_z$ sind. **Hinweis:** Es ist *sehr* hilfreich den Winkelanteil der Wellenfunktionen $\psi_n(\mathbf{r})$ durch Kugelflächenfunktionen darzustellen.