Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik

Prof. Dr. Andreas Knorr
Dr. Marten Richter, Dr. Malte Selig, Maximilian Seyrich
Robert Salzwedel, Philipp Stammer

7. Übungsblatt – Theoretische Physik II: Quantenmechanik

Abgabe: Mi. 5. Juni 2019 vor der Vorlesung im Hörsaal EW 202

Bei der Bepunktung wird Wert gelegt auf **ausführliche Zwischenschritte** *und* **Kommentare** *zur Lösungsstrategie. Die Abgabe erfolgt in Dreiergruppen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium an! Elektronische, gedruckte oder kopierte Abgaben (Ausnahme Numerikaufgaben) sind nicht zugelassen.*

Aufgabe 1 (13 Punkte): *Spin-1/2-Teilchen & Pauli-Matrizen*

Elementarteilchen besitzen neben einer Masse und einer Ladung u.a. noch eine weitere fundamentale Eigenschaft: den Spin. In der Quantenmechanik wird der Spin durch Spin-Operatoren $\hat{S}_i$ beschrieben. Für Spin-1/2-Teilchen können die $\hat{S}_i$ durch Pauli-Matrizen σ_i dargestellt werden:

$$\hat{S}_i := \frac{\hbar}{2}\sigma_i. \tag{1}$$

Eine mögliche Darstellung der hermiteschen und unitären Pauli-Matrizen lautet:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Führen Sie die folgenden Rechnungen ausführlich per Hand durch!

(a) Zeigen Sie unter Verwendung dieser Darstellung, dass die Spin-Operatoren in der Tat Drehimpulsoperatoren sind. Zur Erinnerung: Drehimpulsoperatoren erfüllen die Kommutatorrelationen $[\hat{S}_i, \hat{S}_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{S}_k$.

(b) Rechnen Sie außerdem nach, dass die Pauli-Matrizen die Antikommutatorrelation $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{i,j}\mathbb{1}_2$ erfüllen. Hier ist $\{A, B\} = A\,B + B\,A$ der Antikommutator und $\mathbb{1}_2$ ist die 2×2-Einheitsmatrix.

(c) Benutzen Sie die Darstellung (1), um zu zeigen, dass die Operatoren $\hat{S}_i$ tatsächlich Spin-1/2-Teilchen beschreiben. Zur Erinnerung: Der *Betrag* des Drehimpulses eines Teilchens hängt mit dem Operator $\hat{\mathbf{S}}^2 = \hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 + \hat{S}_z^2$ zusammen.

Der Hilbert-Raum von Spin-1/2-Teilchen ist zweidimensional und soll durch die beiden Basiszustände φ_+ und φ_- beschrieben werden. Mit der obigen Darstellung der Pauli-Matrizen werden diese Zustände durch die folgenden Spaltenvektoren dargestellt:

$$\varphi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \varphi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

(d) Berechnen Sie den Erwartungswert von $\hat{S}_z$ in diesen beiden Zuständen und interpretieren Sie Ihr Ergebnis. Wenden Sie ferner $\hat{S}_z$ auf die beiden Zustände an, interpretieren Sie das Ergebnis?

(e) Was bewirken $\hat{S}_\pm := \hat{S}_x \pm i\hat{S}_y$, $\hat{S}_+\hat{S}_-$ und $\hat{S}_-\hat{S}_+$ angewendet auf die Zustände $\varphi_\pm$?