Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik

Prof. Dr. Andreas Knorr
Dr. Marten Richter, Dr. Malte Selig, Maximilian Seyrich
Robert Salzwedel, Philipp Stammer

8./9. Übungsblatt – Theoretische Physik II: Quantenmechanik

Abgabe: Mi. 19. Juni 2019 vor der Vorlesung im Hörsaal EW 202

Aufgabe 1 (6 Punkte): *Eigenwertproblem Wasserstoffatom: Nachbereitung*

(a) Der Hamiltonian des Zweikörperproblems hat die Form

$$H = \frac{\hat{\mathbf{p}}_1^2}{2m_1} + \frac{\hat{\mathbf{p}}_2^2}{2m_2} + V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \ , \tag{1}$$

wobei V die Wechselwirkung abhängig vom Abstand der zwei Teilchen beschreibt. Verwenden Sie die in der Vorlesung behandelte Transformation und leiten Sie den Hamiltonian der Relativ- und Schwerpunktsbewegung her:

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2\mu} + \frac{\hat{\mathbf{\Pi}}^2}{2M} + V(\mathbf{r}) \ . \tag{2}$$

(b) Bringen Sie die Gleichung

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} - E\right) u(r) = 0 \ , \tag{3}$$

unter Verwendung der Längenreskalierung $\rho = \kappa r$ mit $\kappa = \sqrt{2\mu(-E)}/\hbar$ in ein dimensionslose Form (siehe VL). Welche Einheit hat ρ? Bestimmen Sie zudem die Konstante ρ_0.

(c) Lösen Sie die folgende Differentialgleichung.

$$\left(\frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right) u(\rho) = 0 \ . \tag{4}$$

(d) Machen Sie sich nochmals die Abbruchbedigung für den vorgerechneten Potenzreichenansatz klar (ohne Punkte, mündlich).

Aufgabe 2 (10 Punkte): *Dipolmatrixelement*

Der Dipoloperator ist, analog zur klassischen Physik, definiert über $\hat{\mathbf{d}} = q\hat{\mathbf{r}}$, wobei q für die Ladung steht. Betrachten Sie in dieser Aufgabe ein Wasserstoffatom im elektrischen Feld $\mathbf{E}$, dessen Zustand mithilfe der Quantenzahlen n, l, m beschrieben ist durch $|n, l, m\rangle$.

(a) Berechnen Sie die folgenden Dipolmatrixelemente:

(i) $\langle 2,1,0| \hat{\mathbf{d}} |1,0,0\rangle$
(ii) $\langle 2,1,\pm 1| \hat{\mathbf{d}} |1,0,0\rangle$
(iii) $\langle 2,0,0| \hat{\mathbf{d}} |1,0,0\rangle$

(b) Machen Sie sich den in der Vorlesung vorgezeichneten Weg zur Ableitung der Dipol-Auswahlregeln für beliebige Zustände des Wasserstoffatom klar. Berechnen Sie hierzu $\cos\theta\, Y_l^m(\theta,\varphi)$ mithilfe folgender Rekursionsbeziehung für assoziierte Legendre-Polynome: $(2l+1)xP_l^m(x) = (l+m)P_{l-1}^m(x) + (l-m+1)P_{l+1}^m(x)$. Verwenden Sie die Definition der Kugelflächenfunktionen $Y_l^m(\theta,\varphi)$.

Bitte Rückseite beachten!

Aufgabe 3 (20 Punkte): *Drehimpulsaddition*

Wir betrachten ein Elektron mit Bahndrehimpuls und Spin. Dabei seien die Eigenzustände des Bahndrehimpulsoperators

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{L}}^2|l,m_l\rangle &= \hbar^2 l(l+1)|l,m_l\rangle\\ \hat{L}_z|l,m_l\rangle &= \hbar m_l|l,m_l\rangle\end{aligned}$$

mit $l \in \{0,1,2..\}$ und $m_l \in \{-l...l\}$, sowie des Spinoperators

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{S}}^2|s,m_s\rangle &= \hbar^2 s(s+1)|s,m_s\rangle\\ \hat{S}_z|s,m_s\rangle &= \hbar m_s|s,m_s\rangle\end{aligned}$$

mit $s = \frac{1}{2}$ und $m_s = \pm\frac{1}{2}$ gegeben. Ferner definieren wir den Gesamtdrehimpulsoperator $\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}}$. Dieser wirkt auch die Produktzustände $|l,m_l\rangle \otimes |s,m_s\rangle$.
(a) Beweisen Sie, dass die Produktzustände $|l,m_l\rangle \otimes |s,m_s\rangle$ Eigenzustände von $\hat{J}_z$ aber nicht von $\hat{\mathbf{J}}^2$ sind. Dafür ist es vorteilhaft, die Leiteroperatoren für Drehimpulse $\hat{\mathbf{L}}_\pm = \hat{\mathbf{L}}_x \pm i\hat{\mathbf{L}}_y$ und $\hat{\mathbf{S}}_\pm = \hat{\mathbf{S}}_x \pm i\hat{\mathbf{S}}_y$ einzuführen. Für die Wirkung der Leiteroperatoren des Bahndrehimpulses auf die Zustände $|l,m_l\rangle$ gilt

$$\hat{\mathbf{L}}_\pm|l,m_l\rangle = \hbar\sqrt{(l \pm m_l + 1)(l \mp m_l)}|l,m_l \pm 1\rangle.$$

Analog gilt die selbe Relation für die Spinleiteroperatoren.
(b) Wir führen nun die Eigenzustände des Gesamtdrehimpulsoperators ein, für die formal gilt

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{J}}^2|j,m_j,l\rangle &= \hbar^2 j(j+1)|j,m_j,l\rangle\\ \hat{J}_z|j,m_j,l\rangle &= \hbar m_j|j,m_j,l\rangle.\end{aligned}$$

Hier nehmen die Quantenzahlen die Werten $j = l \pm \frac{1}{2}$ und $m_j \in \{-j...j\}$ an.
Eplizit werden die Eigenzustände des Gesamtdrehimpulses über Linearkombination aus den oben diskutierten Produktzuständen dargestellt.

$$\begin{aligned}|l+\frac{1}{2},m_j,l\rangle &= \sqrt{\frac{l+m_j+\frac{1}{2}}{2l+1}}|l,m_j-\frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{l-m_j+\frac{1}{2}}{2l+1}}|l,m_j+\frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle\\ |l-\frac{1}{2},m_j,l\rangle &= -\sqrt{\frac{l-m_j+\frac{1}{2}}{2l+1}}|l,m_j-\frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{l+m_j+\frac{1}{2}}{2l+1}}|l,m_j+\frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle.\end{aligned}$$

Dabei treten als Koeffizienten die berühmten-berüchtigten (von Studenten gefürchteten) *Clebsch-Gordan Koeffizienten* auf.

(i) Zeigen Sie, dass die gegebenen Zustände Eigenzustände von $\hat{\mathbf{J}}^2$ und $\hat{J}_z$ sind. Hierfür ist es sinnvoll $\hat{\mathbf{J}}^2$ über $\hat{\mathbf{L}}^2$, $\hat{L}_z$, $\hat{\mathbf{L}}_\pm$, $\hat{\mathbf{S}}^2$, $\hat{S}_z$ und $\hat{\mathbf{S}}_\pm$ darzustellen und die Wirkung auf die Zustände explizit zu berechnen.

(ii) Zeigen Sie, dass $|l+\frac{1}{2},m_j,l\rangle$ und $|l-\frac{1}{2},m_j,l\rangle$ Eigenzustände von $\hat{\mathbf{L}}^2$ und $\hat{\mathbf{S}}^2$ aber nicht von $\hat{L}_z$ und $\hat{S}_z$ sind. Interpretieren Sie das Ergebnis.