Zusammenfassung der 11. Vorlesung (14.01.08)

1.4.5 *Die v. Neumann Entropie*:

Sei ρ ein Dichteoperator in einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ der Dimension M und sei

$$\rho = \sum_{i=0}^{M-1} p_i |\psi_i >< \psi_i|, \quad < \psi_i, \psi_k >= \delta_{ik},$$

dann sind die p_i eindeutig, $p_i \geq 0$ und $\sum_i p_i = 1$. man kann nun das Spektrum eines nicht entarteten selbstadjungierten Operators A mit $[A, \rho] = 0$ als Alphabet betrachten, mit dem eine (ggf. unendlich lange) Zeichenreihe gebildet ist, in der der i-te Eigenwert von A mit der Wahrscheinlichkeit p_i auf stochastische Weise erkannt wird (vgl. 9. Vorl.). Die Entropie dieser klassischen Zeichenreihe wäre dann $H(p) = -\sum_i p_i \log_2 p_i$. Quantenmechanisch entspricht diese Zeichenreihe dem Tensorprodukt der zugehörigen Eigenfunktionen ψ_i von A. Dies motiviert die Definition der **v. Neumann Entropie**

$$S(\rho) := -\sum_{i=0}^{M-1} p_i \log_2 p_i = -tr(\rho \log_2 \rho).$$

Für reine Zustände $\Psi = \sum_{i=0}^{M-1} c_i \psi_i \otimes \varphi_i$ in in $\mathcal{H} \otimes \tilde{\mathcal{H}} =$, $\dim \tilde{\mathcal{H}} \geq M$, hatten wir die Verschränktheit mit

$$E(\Psi) = -\sum_{i=0}^{M-1} c_i^2 \log_2 ci^2 = -S(tr_1 \rho) = -S(tr_2 \rho)$$

gemessen.

Zum Beweis von Eigenschaften der v. Neumann kann man oft das Kleinsche Lemma verwenden:

Lemma (Klein): Sei f eine reelle konvexe Funktion mit beschränkter Ableitung $f' \leq \alpha < \infty$. Dann gilt für selbstadjungierte Spurklasseoperatoren A, B eines Hilbertraums

$$\mathrm{tr}(f(A) - f(B))) \geq \mathrm{tr}((A - B) f'(B)).$$

Beweis Für eine konvexe Funktion gilt stets

$$f(y) - f(x) \geq (y - x) f'(y).$$

(Ein links- (rechts-) seitiger Differenzenquotient ist stets kleiner (größer) als die Ableitung). Berechnet man die Spur mit einer Orthonormalbasis von Eigenzuständen φ_i von B, dann gilt

$$\begin{aligned} < \varphi_i, (F(A) - f(B))\varphi_i > &= f(< \varphi_i, A\varphi_i >) - f(< \varphi_i, B\varphi_i >) \\ &\geq (< \varphi_i, A\varphi_i > - < \varphi_i, B\varphi_i >) f'(< \varphi_i, B\varphi_i >) \\ &= < \varphi_i, (A - B)\varphi_i > f'(\lambda_i) \\ &= < \varphi_i, (A - B) f'(B)\varphi_i > . \end{aligned}$$

Summation über i liefert die Behauptung.

Mit Hilfe dieses Lemmas kann man die Konkavität der v.Neumnn Entropie beweisen:

Satz: Seien ρ_i Dichteoperatoren auf $\mathcal{H}$, $q_i \geq 0$ und $\sum_i q_i = 1$,dann gilt:

$$\sum_i q_i S(\rho_i) \leq S(\sum_i q_i \rho_i).$$

Beiweis: s. Übungsaufgabe.

1.4.6 *Die relative v. Neumann Entropie*:

Seien ρ und σ Dichteoperatoren auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$, dann ist die **relative v. Neumann Entropie**

$$S(\rho \| \sigma) := \mathrm{tr}(\rho(\log_2 \rho - \log_2 \sigma)) = -S(\rho) - \mathrm{tr}(\rho \log_2 \sigma).$$

Sie erfüllt ebenfalls die Kleinsche Ungleichung und ist deshalb ein Maß dafür, wieweit sich ρ von σ unterscheidet:

Satz:

$$S(\rho \| \sigma) \geq 0, \qquad (S(\rho \| \sigma) = 0 \Leftrightarrow \rho = \sigma).$$

Beweis: Seien $\rho = \sum_i p_i|\varphi_i >< \varphi_i|$ und $\sigma = \sum_i q_i|\psi_i >< \psi_i|$ spektrale Zerlegungen, dann gilt

$$\begin{aligned}
S(\rho\|\sigma) &= \sum_{\{i|p_i\neq 0\}} p_i(\log_2 p_i - <\varphi_i, \log_2\sigma, \varphi_i>) \\
&= \sum_{\{i|p_i\neq 0\}} p_i(\log_2 p_i - \sum_k |<\varphi_i, \psi_k>|^2 \log_2 q_k) \\
&\geq \sum_{\{i|p_i\neq 0\}} p_i(\log_2 p_i - \log_2(\sum_k |<\varphi_i, \psi_k>|^2 q_k) \\
&= -\sum_{\{i|p_i\neq 0\}} p_i \log_2(\sum_k |<\varphi_i, \psi_k>|^2 \frac{q_k}{p_i}) \\
&\geq -\log_2(\sum_{\{i|p_i\neq 0\}} \sum_k |<\varphi_i, \psi_k>|^2 q_k) \\
&\geq -\log_2(\sum_k \|\psi_k\|^2 q_k) = -\log_2 1 = 0.
\end{aligned}$$

Falls $S(\rho\|\sigma) = 0$ ist, müssen in dieser Formel alle Zeilen gleich sein.

Aus

$$-\log_2(\sum_{\{i|p_i\neq 0\}} \sum_k |<\varphi_i, \psi_k>|^2 q_k) = -\log_2(\sum_k \|\psi_k\|^2 q_k) = 0$$

folgt

$$E_\rho := \sum_{\{i|p_i\neq 0\}} |\varphi_i >< \varphi_i| \quad \geq \sum_{\{k|q_k\neq 0\}} |\psi_k >< \psi_k| =: E_\sigma.$$

Da diese Ungleichung die Vertauschbarkeit der Projektoren, $[E_\rho, E_\sigma] = 0$, impliziert, kann sie auch in der Form

$$E_\rho := \sum_{\{i|p_i\neq 0\}} |\psi_i >< \psi_i| \quad \geq \sum_{\{k|q_k\neq 0\}} |\psi_k >< \psi_k| =: E_\sigma$$

geschrieben werden, wobei auf der linken Seite eine geeignete orthonormale Erweiterung des Ortonormalsystems $\{\psi_i\}_{\{k|q_k\neq 0\}}$ steht. Die Annahme $E_\rho < E_\sigma$ führt dann zum Widerspruch: $-\log_2(\sum_k \|\psi_k\|^2 q_k) \neq 0$ Also gilt $E_\rho = E_\sigma$. ρ und σ haben denselber Träger, auf den wir die nachfolgenden Betrachtungen beschränken können.

Aus

$$
\begin{aligned}
&- \sum_{\{i|p_i\neq 0\}} p_i \log_2(\sum_k | < \varphi_i, \psi_k > |^2 \frac{q_k}{p_i}) \\
&= -\log_2(\sum_{\{i|p_i\neq 0\}} p_i \sum_k | < \varphi_i, \psi_k > |^2 \frac{q_k}{p_i}) \quad = \quad 0
\end{aligned}
$$

folgt $p_i \in \{0, 1\}$ oder

$$
\sum_k | < \varphi_i, \psi_k > |^2 \frac{q_k}{p_i} = \sum_k | < \varphi_j, \psi_k > |^2 \frac{q_k}{p_j}. \qquad \clubsuit
$$

Im ersten Fall sei $p_l = 1$, dann ist $p_i = \delta_{il}$. Wegen $E_\rho = E_\sigma$ gibt es dann auch genau ein k $q_k \neq 0$, etwa $q_m = 1$. Dann ist $\log_2 | < \varphi_l, \psi_m > |^2 \frac{q_m}{p_l} = 0$, also $\varphi_l = \psi_m$. Aus dem zweiten Fall kann noch nichts gefolgert werden.

Aus

$$
\sum_{\{i|p_i\neq 0\}} p_i(\log_2(\sum_k | < \varphi_i, \psi_k > |^2 q_k - \sum_k | < \varphi_i, \psi_k > |^2 \log_2 q_k) = 0
$$

folgt, da die in den Klammern stehenden Differenzen positiv oder Null sind, für $p_i \neq 0$

$$
\log_2(\sum_k | < \varphi_i, \psi_k > |^2 q_k = \sum_k | < \varphi_i, \psi_k > |^2 \log_2 q_k).
$$

Daraus folgt für $p_i \neq 0$: $| < \varphi_i, \psi_k > |^2 \in \{0, 1\}$ oder die Gleichheit der von Null verschiedenen $q_i := \beta \neq 0$. Im ersten Fall gilt wegen

$$
\sum_k | < \varphi_i, \psi_k > |^2 = \|\varphi_i\|^2 = 1 \quad \text{und} \quad \sum_i | < \varphi_i, \psi_k > |^2 = \|\psi_k\|^2 = 1,
$$

dass die quadratische Matrix $((| < \varphi_i, \psi_k > |^2))$ in jeder Zeile und in jeder Spalte genau eine Eins und sonst Nullen hat. Solche Matrizen heißen Permutationsmatrizen. Sie sind offenbar unitär. Steht in $((| < \varphi_i, \psi_k > |^2))$ die Eins der k-ten Spalte in der $f(k)$-ten Zeile, dann ist f bijektiv und es gilt

$$
\sum_{i,l} |\varphi_i >< \varphi_i, \psi_k >< \psi_k, \varphi_l >< \varphi_l| = |\varphi_{f(k)} >< \varphi_{f(k)}|.
$$

Da für rg$E_\sigma > 1$ auch ♣ erfüllt sein muss, gilt überdies $(q_{f(i))}/p_i) = (q_{f(j))}/p_j)$, so dass wegen $\log_2 q_{f(j))}/p_j) = 0$ auch $\rho = \sigma$ folgt. - Im zweiten Fall ist

$$\sum_k | < \varphi_i, \psi_k > |^2 \frac{\beta}{p_i} = |\varphi_i\|^2 \frac{\beta}{p_i} = \frac{\beta}{p_i}.$$

Für rg$E_\sigma = 1$ ist $p_l = 1$ und $\varphi_l = \psi_m$ wie im letzten Absatz. Da für rg$E_\sigma > 1$ auch ♣ erfüllt sein muß, folgt, dass auch die von Null verschiedenen p_k gleich sein müssen. Da es dann auf die Basiswahl im Träger nicht ankommt, folgert man $\rho = \sigma$.

Damit ist die Kleinsche Ungleichung für die relative v.Neumann Entropie gezeigt.