Zusammenfassung der 12. Vorlesung (21.01.08)

1.4.7 *Eigenschaften der v. Neumann Entropie bipartiter Systeme*:

Betrachte zwei Hilberträume endlicher Dimension, $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$, sowie das Tensorprodukt $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Sind ρ_i Dichteoperatoren in $\mathcal{H}_i$ dann gilt mit den Spektraldarstellungen $\rho_1 = \sum_i p_i |\varphi_i >< \varphi_i|$, und $\rho_2 = \sum_i q_k |\psi_k >< \psi_k|$

$$\begin{aligned}
\log_2(\rho_1 \otimes \rho_2) &= \log_2 \sum_{ik} p_i q_k (|\varphi_i >< \varphi_i| \otimes \mathbf{1})(\mathbf{1} \otimes |\psi_k >< \psi_k|) \\
&= \sum_{ik} (\log_2 p_i + \log_2 q_k)(|\varphi_i >< \varphi_i| \otimes \mathbf{1})(\mathbf{1} \otimes |\psi_k >< \psi_k|) \\
&= (\log_2 \rho_1 \otimes \mathbf{1})(\mathbf{1} \otimes E_2) + (E_1 \otimes \mathbf{1})(\mathbf{1} \otimes \log_2 \rho_2) \\
&= (\log_2 \rho_1 \otimes E_2) + (E_1 \otimes \log_2 \rho_2),
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
S(\rho_1 \otimes \rho_2) &= -\mathrm{tr}((\rho_1 \otimes \rho_2) \log_2(\rho_1 \otimes \rho_2)) \\
&= -\mathrm{tr}((\rho_1 \otimes \rho_2)((\log_2 \rho_1 \otimes E_2) + (E_1 \otimes \log_2 \rho_2)) \\
&= -\mathrm{tr}((\rho_1 \otimes \rho_2)(\log_2 \rho_1 \otimes E_2)) - \mathrm{tr}((\rho_1 \otimes \rho_2)(E_1 \otimes \log_2 \rho_2)) \\
&= -\mathrm{tr}((\rho_1(\log_2 \rho_1 \otimes \rho_2)) - \mathrm{tr}((\rho_1 \otimes \rho_2 \log_2 \rho_2)) \\
&= -\mathrm{tr}_1(\rho_1(\log_2 \rho_1)\mathrm{tr}_2\rho_2 - \mathrm{tr}_1\rho_1\mathrm{tr}_2(\rho_2 \log_2 \rho_2) \\
&= S(\rho_1) + S(\rho_2),
\end{aligned}$$

Falls der Dichteoperator des bipartiten Systems nicht faktorisierend ist, ist seine Entropie kleiner:

Satz(Subadditivität): Sei ρ ein Dichteoperator in $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, $\dim \mathcal{H}_i < \infty$, $\rho_1 = \mathrm{tr}_2\rho$, $\rho_2 = \mathrm{tr}_1\rho$, dann gilt

$$S(\rho) \leq S(\rho_1) + S(\rho_2), \quad (S(\rho) = S(\rho_1) + S(\rho_2) \Leftrightarrow \rho = \rho_1 \otimes \rho_2).$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
0 &\leq S(\rho \| \rho_1 \otimes \rho_2) = -S(\rho) - \mathrm{tr}(\rho \log_2(\rho_1 \otimes \rho_2)) \\
&= -S(\rho) - \mathrm{tr}(\rho(\log_2 \rho_1 \otimes E_2) + (E_1 \otimes \log_2 \rho_2)).
\end{aligned}$$

Nun gilt

$$\rho = (E_1 \otimes \mathbf{1})\rho(E_1 \otimes \mathbf{1}) = (\mathbf{1} \otimes E_2)\rho(\mathbf{1} \otimes E_2),$$

so dass

$$\begin{aligned} 0 &\leq S(\rho\|\rho_1 \otimes \rho_2) \\ &= -S(\rho) - \operatorname{tr}(\rho(\log_2 \rho_1 \otimes \mathbf{1})) - \operatorname{tr}(\rho(\mathbf{1} \otimes \log_2 \rho_2)) \\ &= -S(\rho) - \operatorname{tr}(\rho_1 \log_2 \rho_1) - \operatorname{tr}(\rho_2 \log_2 \rho_2) \\ &= -S(\rho) + S(\rho_1) + S(\rho_2). \end{aligned}$$

Aus der Kleinschen Ungleichung folgt damit der Satz.

Mit Hilfe einer Purifikation kann man aus dem letzten Satz noch eine weitere Ungleichung folgern

Satz(Dreiecksungleichung): Mit den gleichen Voraussetzungen und Bezeichnungen wie beim letzten Satz gilt

$$|S(\rho_1) - S(\rho_2)| \leq S(\rho).$$

Beweis: Sei $\mathcal{H}_3$ ein Hilbertraum mit $\dim \mathcal{H}_3 \geq \dim \mathcal{H}_1 \dim \mathcal{H}_2$. Dann gibt es in $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3$ einen reinen Zustand Ψ mit $\rho = \operatorname{tr}_3(|\Psi >< \Psi|)$, der deshalb eine Purifikation von ρ genannt wird. Aus der Subadditivität der Entropie folgen dann den Ungleichungen

$$\begin{aligned} S(\operatorname{tr}_2(|\Psi >< \Psi|)) &\leq S(\operatorname{tr}_{23}(|\Psi >< \Psi|)) + S(\operatorname{tr}_{12}(|\Psi >< \Psi|)), \\ S(\operatorname{tr}_1(|\Psi >< \Psi|)) &\leq S(\operatorname{tr}_{13}(|\Psi >< \Psi|)) + S(\operatorname{tr}_{12}(|\Psi >< \Psi|)), \end{aligned}$$

wobei die Indizes am Spursymbol anzeigen, über welche der drei Hilberträume die Spur zu bilden ist. Überdies gelten noch die Gleichungen

$$\begin{aligned} S(\operatorname{tr}_2(|\Psi >< \Psi|)) &= S(\operatorname{tr}_{13}(|\Psi >< \Psi|)) \\ S(\operatorname{tr}_1(|\Psi >< \Psi|)) &= S(\operatorname{tr}_{23}(|\Psi >< \Psi|)), \end{aligned}$$

mit denen man aus den beiden Ungleichungen

$$\begin{aligned} S(\rho) &= S(\operatorname{tr}_3(|\Psi >< \Psi|)) = S(\operatorname{tr}_{12}(|\Psi >< \Psi|)) \\ &\geq \left\{ \begin{array}{l} S(\operatorname{tr}_{13}(|\Psi >< \Psi|)) - S(\operatorname{tr}_{23}(|\Psi >< \Psi|)) \\ S(\operatorname{tr}_{23}(|\Psi >< \Psi|)) - S(\operatorname{tr}_{13}(|\Psi >< \Psi|)) \end{array} \right. \end{aligned}$$

erschließen kann. Dies ist aber die Behauptung.

Für einen reinen bipartiten Zustand ρ folgt aus der Dreiecksungleichung $S(\rho_1) = S(\rho_2)$, sie verallgemeinert deshalb eine Aussage, die wir von der Schidtdarstellung für reine bipartite Zustände her kennen.

2 *Verschränktheitsmaße für gemischte bipartite Zustände*:

Im Hilbertraum $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ sei $\mathcal{T}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$ die konvexe Menge aller Zustände und $\mathcal{D}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$ die konvexe Teilmenge der unverschränkten Zustände. Wie kann man den Grad der Verschränktheit der Zustände messen? Zweifellos sollte für ein Verschränktheitsmaß E gelten:

$$\text{(I)} \qquad E(\rho) \begin{cases} = & 0 \quad \text{falls} \quad \rho \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2) \\ > & 0 \quad \text{sonst} \end{cases} .$$

Nun ändern lokale unitäre Transformationen den Versschränktheitsgrad nicht, sie lassen die Schmidtkoeffizienten der Eigenfunktionen invariant. ρ und $(U_1 \otimes U_2)\rho(U_1^+ \otimes U_2^+)$ haben den gleichen Verschränktheitsgrad. Jedes ρ definiert auf diese Weise eine Verschränktheitsklasse, der Orbit der lokal-unitären Gruppe ist. Deshalb fordert man auch:

$$\text{(II)} \quad E(\rho) = E((U_1 \otimes U_2)\rho(U_1^+ \otimes U_2^+)) \quad \text{falls} \quad U_1^+U_1 = \mathbf{1}, U_2^+U_2 = \mathbf{1}.$$

Die letzte Forderung ist, dass lokale Operationen $J = \_! \otimes J_2$, wobei J_i vollständig positive spurerhaltende affine Operatoren auf den Dichteoperatoren sind, den Verschränktheitsgrad nicht erhöhen können, sondern im Allgemeinen erniedrigen

$$\text{(III)} \quad E(\rho) \geq E((J_1 \otimes J_2)(\rho) \quad \text{falls} \quad J_i \text{vollst. positiv und spurerhaltend.}$$

Verschränktheitsmaße kann man konstruieren, indem man die Distanz eines Dichtoperators von $\mathcal{D}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$ geeignet einführt. Ein topologisches Bild, wie die Menge $\mathcal{D}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$ in $\mathcal{T}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$ gelegen ist, hat man nicht. Schon im einfachsten Fall der Qubitzustände, ist $\mathcal{T}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$ als Teil einer Hyperebene im $\mathbf{R}^{16}$ darzustellen. Da die Gruppe der unitären Operatoren auf der Einheitssphäre eines Hilbertraumes transitiv operiert, d.h. der Orbit eines jeden Einheitsvektors ist bereits die ganze Sphäre, und die unitäre Gruppe nur eine Zusammenhangskomponente hat, muß die Menge der reinen bipartiten Zustände auf den Extremalpunkten von $\mathcal{T}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$ zusammenhängen. Über die Homotopie dieser Menge weiß man jedoch nichts.

2.2 *Das v. Neumannsche Verschränktheitsmaß*:

Das v. Neumannsche Verschränkheitssmaß ist definiert als

$$E_{v.N.}(\rho) = \inf_{\sigma \in \mathcal{D}} S(\rho \| \sigma).$$

Dieses Maß ist eine Fortsetzung des Verschränktheismaßes der partiellen Spur für reine Zustände, wie der folgende Satz zeigt.

Satz(Plenio und Verdral): Es gilt

$$E_{v.N.}(|\Psi >< \Psi|) = E(|\Psi >< \Psi|) = S(\mathrm{tr}_2(\Psi >< \Psi|)).$$

Beweis: Sei $\Psi = \sum_\nu c_\nu \varphi_\nu \otimes \psi_\nu$ die Schmidt-Darstellung von Ψ, dann gilt

$$\begin{aligned}
& S(|\Psi >< \Psi| \| \sum_\nu c_\nu^2 |\varphi_\nu \otimes \psi_\nu >< \varphi_\nu \otimes \psi_\nu|) \\
= \;& \mathrm{tr}(|\Psi >< \Psi|(\log_2 \mathrm{tr}_2(\Psi >< \Psi| - \log_2 \sum_\nu c_\nu^2 |\varphi_\nu \otimes \psi_\nu >< \varphi_\nu \otimes \psi_\nu|)) \\
= \;& < \Psi, \log_2 1 |\Psi >< \Psi| - \sum_\nu (\log_2 c_\nu^2) |\varphi_\nu \otimes \psi_\nu >< \varphi_\nu \otimes \psi_\nu | \Psi > \\
= \;& - \sum_\nu (\log_2 c_\nu^2) < \Psi | \varphi_\nu \otimes \psi_\nu >< \varphi_\nu \otimes \psi_\nu | \Psi > = - \sum_\nu c_\nu^2 \log_2 c_\nu^2 \\
= \;& S(\mathrm{tr}_2(\Psi >< \Psi|)).
\end{aligned}$$

Zu zeigen bleibt damit nur noch, dass für $\sigma_0 := \sum_\nu c_\nu^2 |\varphi_\nu \otimes \psi_\nu >< \varphi_\nu \otimes \psi_\nu| \in \mathcal{D}$ die relative Entropie $S(|\Psi >< \Psi| \| \sigma_0)$ in $\{S(|\Psi >< \Psi| \| \sigma) | \sigma \in \mathcal{D}\}$ minimal ist.

Dazu betrachten wir für $\lambda \in [0,1]$ und beliebiges $\sigma \in \mathcal{D}$ die rechtsseitige Ableitung von $S(|\Psi >< \Psi|) \| (1-\lambda)\sigma_0 + \lambda \sigma)$ an der Stelle $\lambda = 0$:

$$\begin{aligned}
S'_{\sigma_0}(\sigma) \;&:=\; -\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} (S(|\Psi >< \Psi|) \| (1-h)\sigma_0 + h\sigma) - S(|\Psi >< \Psi|) \| \sigma_0)) \\
&=\; -\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} < \Psi, (\log_2(h(\sigma - \sigma_0) + \sigma_0) - \log_2 \sigma_0) \Psi >
\end{aligned}$$

Wie man leicht nachrechnet, ist

$$\log_2 x = \frac{1}{\ln 2}\int_0^\infty (\frac{1}{1+t} - \frac{1}{x+t})dt,$$

also ist

$$\begin{aligned}
&S'_{\sigma_0}(\sigma)\\
&= \frac{1}{\ln 2}\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h} < \Psi, \int_0^\infty ((\frac{1}{1+t} - \frac{1}{\sigma_0 + t\mathbf{1}})\\
&\qquad\qquad -(\frac{1}{1+t} - \frac{1}{h(\sigma-\sigma_0)+\sigma_0+t}))dt\Psi >\\
&= \frac{1}{\ln 2}\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h} < \Psi, \int_0^\infty (\frac{1}{h(\sigma-\sigma_0)+\sigma_0+t\mathbf{1}} - \frac{1}{\sigma_0+t\mathbf{1}})dt\Psi >\\
&= \frac{1}{\ln 2}\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h} < \Psi, \int_0^\infty (\frac{1}{h(\sigma-\sigma_0)+\sigma_0+t\mathbf{1}}(\sigma_0 + t\mathbf{1} - (h(\sigma\\
&\qquad\qquad -\sigma_0) * \sigma_0 + t\mathbf{1}))\frac{1}{\sigma_0+t\mathbf{1}})dt\Psi >\\
&= \frac{1}{\ln 2}\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h} < \Psi, \int_0^\infty (\frac{1}{h(\sigma-\sigma_0)+\sigma_0+t\mathbf{1}}h(\sigma_0-\sigma)\frac{1}{\sigma_0+t\mathbf{1}})dt\Psi >\\
&= \frac{1}{\ln 2} < \Psi, \int_0^\infty (\frac{1}{\sigma_0+t\mathbf{1}}(\sigma_0-\sigma)\frac{1}{\sigma_0+t\mathbf{1}})dt\Psi >
\end{aligned}$$

Weil $S'_{\sigma_0}(\sigma)$ ein affines Funktional in σ ist, ist nur noch zu zeigen, dass $S'_{\sigma_0}(|\varphi\otimes\psi><\varphi\otimes\psi|) \geq 0$ für alle $\varphi \in \mathcal{H}_1$, $\psi \in \mathcal{H}_2$, denn $|\varphi\otimes\psi><\varphi\otimes\psi|$ sind dann alle Extremalpunkte der konvexen Menge $\mathcal{D}$.