Zusammenfassung der 8. Vorlesung (10.12.07)

1.3 *Korrelationen, Verschränktheit, Quantenkorrelationen bipartiter Systeme (Fortsetzung)* 1.3.2 *Teleportation*:
Es ist unmöglich, Quanteninformation, d.h. etwa den unbekannten Zustand eines Atoms mit M Anregungszuständen, durch einen klassischen Informationskanal zu übertragen. Der Grund dafür ist die prinzipielle Unerkennbarkeit dieses Zustands, denn es ist bestenfalls möglich, durch Idealmessung erster Art, den zufälligen Wert einer einzigen Observablen, d.h. ein Ereignis in einem maximal Booleschen Unterverband des Verbandes aller Projektionsoperatoren, festzustellen. Daraus kann man, falls der gemessene Wert der Observablen nicht entartet ist, aber nur auf den Zustand des Atoms nach der Messung schließen. Der fragliche Zustand vor der Messung bleibt unerkannt. Unter gewissen Voraussetzungen reicht die Übertragung eines solchen gemessenen Wertes durch einen klassischen Informationskanal jedoch aus, um den Zustand von einem Atom auf ein anderes, das sich in beliebigem Abstand von dem ersten befinden kann, genau zu übertragen. Die Vorschrift für solch eine Übertragung, bei der der Sender "Alice" lokal eine betimmte Messung durchführt und das zufällige Messergebnis dem Empfänger "Bob" über einen klassischen Kanal mitteilt, und dieser daraufhin eine entsprechende lokale Operation ausführren muss, nennt man Teleporation.

Zur Teleportation werden drei Atome mit M Anregungszuständen benötigt, die mit Hilberträumen $\mathcal{H}_i \cong \mathbf{C}^M$, $i = 1, 2, 3$, beschrieben werden. In $\mathbf{C}^M \otimes \mathbf{C}^M$ ist $\Omega = (1/\sqrt{M}) \sum_{k=0}^{M-1} |kk>$, wobei $\{|kl>\}$ die Computerbasis ist, ein maximal verschränkter Zustand und unter der notwendigen und hinreichenden Voraussetzung, dass es in $\mathbf{C}^M \otimes \mathbf{C}^M$ eine Basis maximal verschränkter Zustände $\{\Phi_\nu\}_{\nu=0,1,2,\ldots,(M^2-1)}$ gibt, existiert in $\mathcal{L}(\mathbf{C}^M)$ eine Orthonormalbasis unitärer Operatoren $\{U_\nu\}_{\nu=0,1,2,\ldots,(M^2-1)}$. $\mathrm{tr}(U_\nu^+ U_\mu) = M\delta_{\nu\mu}$, mit $(U_\nu \otimes) \mathbf{1})\Omega = \Phi_\nu$ (vgl. Aufgabe 10, 4. Übungsblatt). Wesentlich für die Teleportation ist dabei, dass sich die Basiselemente Φ_ν durch lokale Operationen auf dem ersten Faktor von $\mathbf{C}^M \otimes \mathbf{C}^M$ aus dem maximalverschränkten Zustand Ω erzeugen lassen. Der Sender "Alice" hat zwei der Atome, die in den Hilberträmen $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ beschriebenen, für lokale Operationen zur Verfügung, während "Bob" dazu das dritte, in $\mathcal{H}_3$ beschriebene, zur Verfügung hat. In der Situation

$$\overbrace{\mathcal{H}_1 \quad \otimes \quad \mathcal{H}_2}^{\text{Alice}} \quad \otimes \quad \overbrace{\quad \mathcal{H}_3 \quad}^{\text{Bob}}$$

ist das erste Atom in dem unbakannten Zustand ρ, der teleportiert werden soll, und die Atome zwei und drei befinden sich in dem maximal verschränkten Zustand $|\Omega >< \Omega|$. Mit lokalen Operationen und klassischer Kommunikation (LOCC) bewerkstelligen "Alice" und " Bob" die Teleportation von ρ:

$$\rho \quad \otimes \quad |\Omega >< \Omega| \qquad \stackrel{\text{LOCC}}{\longmapsto} \qquad |\Omega' >< \Omega'| \quad \otimes \quad \rho,$$

wobei $|\Omega' >< \Omega'|$ nun ein maximal verschränkter Zustand der Atome eins und zwei ist, die sich bei "Alice" befinden. Während sich vor der Teleportation "Alice" und "Bob" einen maximal verschränkten Zustand "geteilt" haben, ist nun "Alice" allein im Besitz eines solchen Zustandes.

Im Einzelnen funktioniert die Teleportation so: In einer **ersten lokalen Operation** misst "Alice" an ihren Atomen die nichtentartete Observable $A = \sum_{M=0}^{M^2-1} \nu|\Phi_\nu >< \Phi_\nu|$, d.h. $A \otimes \mathbf{1}_3$ in $(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2) \otimes \mathcal{H}_3$ und erhält mit der Wahrscheinlichkeit

$$\operatorname{tr}((|\Phi_\nu >< \Phi_\nu| \otimes \mathbf{1}_3)(\rho \otimes |\Omega >< \Omega|)) = \frac{1}{M^2}$$

als Ergebnis den Wert ν. Zum Ausrechnen der Spur nutzt man aus, dass die $\Phi_\nu \otimes |k>$ eine Orthonormabasis in $(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2) \otimes \mathcal{H}_3$ bilden, setzt $\Phi_\nu = (U_\nu \otimes \mathbf{1}_2)\Omega$ ein und schreibt die Ω explizit als Summen aus. Da die Φ_ν durch lokale Operation in $\mathcal{H}_1$ erzeugt werden, findet man hinreichend viele Kroneckersymbole, um die Berechnung der Mehrfachsumme auf die der Spur von ρ zu reduzieren. Der Zustand nach der Messung mit dem Ergebnis ν im Hilbertraum $(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2) \otimes \mathcal{H}_3$ ist:

$$\begin{aligned}
& \frac{(|\Phi_\nu >< \Phi_\nu| \otimes \mathbf{1}_3)(\rho \otimes |\Omega >< \Omega|)(|\Phi_\nu >< \Phi_\nu| \otimes \mathbf{1}_3)}{\operatorname{tr}((|\Phi_\nu >< \Phi_\nu| \otimes \mathbf{1}_3)(\rho \otimes |\Omega >< \Omega|))} \\
= \; & M^2(|\Phi_\nu >< \Phi_\nu| \otimes \mathbf{1}_3)(\rho \otimes |\Omega >< \Omega|)(|\Phi_\nu >< \Phi_\nu| \otimes \mathbf{1}_3) \\
= \; & \sum_{kl} < k|U_\nu^+ \rho U_\nu|l > |\Phi_\nu >< \Phi_\nu| \otimes |k >< l| = |\Phi_\nu >< \Phi_\nu| \otimes U_\nu^+ \rho U_\nu,
\end{aligned}$$

wobei die Berechnung des Zählers in der gleichen Weise erfolgen kann wie die des Nenners, die oben beschrieben wurde. Mittels **klassischer Kommunikation** teilt "Alice" den Wert ν "Bob" mit, den sie bei der lokalen Messung von A erhalten hat. "Bob" führt daraufhin eine **zweite lokale Operation** durch: Er präpariert sein Teilchen mit der Operation $\mathcal{J}_\nu : \sigma \mapsto U_\nu \sigma U_\nu^+$ um, und somit ist das bei ihm befindliche dritte Atom in dem unbekannten Zustand ρ. Dies vollendet die Teleportation .

Allerdings teilen sich nun "Bob" und "Alice" nicht mehr ein Teilchenpaar in einem maximal verschränkten Zustand, dafür hat "Alice" ein Tailchenpaar in einem solchen Zustand, nämlich $\Omega' = \Phi_\nu$. Um weiter auf der Quantenebene kommunizieren zu können, könnte "Alice" eines ihrer beiden Atome auf klassischen Wege an "Bob" senden und damit einen neuen Teleportationskanal schaffen.

1.3.2 *Dense Coding*:

Die Idee, ein präpariertes Atom klassisch als Datenträger klassischer Information zu versenden, wirft die Frage auf, wieviel klassische Information auf einem Atom gespeicher werden kann. Zur Übertragung einer N Bit Nachricht kann ein Atom mit $M = 2^N$ Anregungszuständen diesen. Teilen sich der Sender "Alice" und der Empfänger "Bob" ein bipartites System solcher Atome in einem maximal verschränken Zustand $|\Omega >< \Omega|$ wie bei der Teleportation, dann kann Alice mit der lokalen Operation $\mathcal{J}_\nu : \sigma \mapsto U_\nu \sigma U_\nu^+$ an ihrem Atom aus $|\Omega >< \Omega|$ den Zustand $(\mathcal{J}_\nu \otimes \mathbf{1})(|\Omega >< \Omega|) = |\Phi_\nu >< \Phi_\nu|$ machen, und ihr Teilchen dann an Bob senden. Bob ist dann im Besitz eines Teilchenpaars in einem Eigenzustand von $A = \sum_\nu \nu |\Phi_\nu >< \Phi_\nu|$, und kann das von "Alice" gesentete ν durch Idealmessung von A feststellen. Da ν von 0 bis $M^2 - 1$ läuft, können so $M^2 = 2^{2N}$ verschiedene Nachrichten, d.h. eine $2N$ Bit Nachrichten gespeichert werden. Die Speicherkapazität verdoppelt sich also bei Unterstützung mit der Verschränktheit. Dies nennt man dichte Kodierung. Überdies kann die in ν kodierte Nachricht mit (Fast-) Sicherheit nur dann entschlüsselt werden, wenn am verschränkten Teilchenpaar gemessen wird, d.h. die Nachricht ist auch krytographiert.