Technische Universität Berlin
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. H.-H. v. Borzeszkowski
Dr. T. Chrobok
Dr. N. Bücking

18. Dezember 2007

8. Übungsblatt zur Allgemeinen Relativitätstheorie II

Abgabe: Dienstag 8.1.08 vor der Übung

Aufgabe 1 (10 Punkte): ***Schwarzschild-Vakuole***

Während das kosmologische Prinzip davon ausgeht, dass die Massendichte auf kosmischen Skalen konstant ist, stellen die beobachtbaren Himmelsobjekte (Sterne, Galaxien, Galaxienhaufen) große Inhomogenitäten in der Dichteverteilung dar.

In dieser Aufgabe sollen kugelsymmetrische Lösungen der Schwarzschildmetrik

$$ds^2 = (1 - \frac{2M}{r})c^2dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} + r^2 d\Omega, \tag{1}$$

die in einem Friedmann-Kosmos (mit inkohärenter Materie, $p = 0$) mit der Robertson-Walker-Metrik

$$ds^2 = c^2dt^2 - K^2(\frac{d\rho^2}{1 - \epsilon\rho^2} + \rho^2 d\Omega) \tag{2}$$

eingebettet sind, als Modell diskutiert werden. $d\Omega$ bezeichnet hierbei das Raumwinkelelement, es gilt das folgende Einheitensystem: $K = [\mathrm{m}]$, ρ dimensionslos, ϵ dimensionslos, $\varrho_M = [\mathrm{kg/m^3}]$, $\kappa = 8\pi G/c^2$.

Die beiden Metriken müssen durch Koordinatentransformationen zunächst in eine vergleichbare Form gebracht werden.

1. Durch Lösen der Einsteinschen Gleichungen $R_{\mu\nu} - 1/2 R g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$ mit der Robertson-Walker-Metrik (2) kann die sogenannte Friedmann-Gleichung

$$\frac{1}{c^2}\Big(\frac{\partial K}{\partial t}\Big)^2 + \epsilon = \frac{\kappa A}{K} \tag{3}$$

abgeleitet werden ($A = \varrho_M K^3/3$), die die Evolution der Metrik (2) beschreibt. Eliminieren Sie mit Hilfe der Friedmann-Gleichung (3) die Zeitkoordinate t in der Metrik (2). Dies entspricht dem Koordinatensystem eines Beobachters, der sich mit den expandierenden kosmischen Koordinaten mitbewegt.

2. Setzen Sie die allgemeinen Koordinatentransformationen $K(r, R)$ und $\rho(K, r) = r/K(r, R)$ in das Ergebnis ein. Zeigen Sie, dass für die Transformation von K die Bedingungen

$$\frac{\partial K}{\partial R} \neq 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial K}{\partial r} = \frac{rK(\kappa A - \epsilon K)}{r^2\kappa A - K^3} \tag{5}$$

gelten, wenn Sie R als Zeitkoordinate interpretieren und die Metrik mit der Schwarzschildmetrik (1) in Übereinstimmung gebracht werden soll.

3. Berechnen Sie die g_{rr}-Komponente der Metrik aus der Bedingung (5). Vergleichen Sie das Ergebnis mit der entsprechenden Komponente der Schwarzschildmetrik (1) und stellen Sie eine Beziehung zwischen der Schwarzschildmasse M und K an einem bestimmten Radius r_0 auf. Wovon hängt der entsprechende Friedmannradius ρ_0 ab (und wovon nicht)? Was bedeuten diese Ergebnisse für die Physik in der Nähe des Schwarzschild-Zentrums und bei r_0 im Laufe der Zeit?

4. Berechnen Sie den Friedmannradius ρ_0 und den entsprechenden Radius in der Schwarzschildmetrik r_0 für eine mittlere kosmische Massendichte ϱ_M von $3.7 \cdot 10^{-28}\mathrm{kg/m^3}$ und die Massen $m_\odot = 2 \cdot 10^{30}\mathrm{kg}$ (Sonnenmasse), $m_G = 5 \cdot 10^{10} m_\odot$ (Galaxienmasse) und $m_H = 10^{14} m_\odot$ (Masse eines Galaxienhaufens). Diskutieren Sie die Ergebnisse.