Technische Universität Berlin
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. H. Stark,
Frank Milde,
Reinhard Vogel 15. Oktober 2007

1. Übungsblatt zur Theoretische Physik I – Mechanik

Abgabe: Eine Woche nach der Ausgabe am Beginn der Mittwochsvorlesung

Aufgabe 1 : *Kreuzprodukt und Levi-Civita-Tensor*

Das Kreuzprodukt $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ zweier Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathrm{R}^3$ ist wie folgt definiert:

- $\mathbf{c}$ steht senkrecht auf $\mathbf{a}, \mathbf{b}$;
- $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ sind wie ein Rechtsbein orientiert;
- der Betrag von $\mathbf{c}$ entspricht dem Flächeninhalt des von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ aufgespannten Parallelogramms.

Die Komponenten c_i von $\mathbf{c}$ berechnen sich mit Hilfe des total antisymmetrische Tensors 3. Stufe (Levi-Civita-Tensor) zu $c_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k$. Dabei ist

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{falls } (ijk) = (123) \text{ oder gerade Permutation von } (123), \\ -1 & \text{falls } (ijk) \text{ ungerade Permutation von } (123), \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \qquad i,j,k \in \{1,2,3\}.$$

Zum Beispiel ist $\varepsilon_{231} = 1$, weil (231) durch eine gerade Anzahl von Vertauschungen zweier Indizes aus (123) hervorgeht $[(231) \to (132) \to (123)]$. Als Merkregel läßt sich der Vektor $\mathbf{c} = c_i \mathbf{e}_i$ über die Determinante $\begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$ nach der Regel von Sarrus berechnen.

(Es gilt die Einsteinsche Summenkonvention: über doppelt auftretende Indizes wird von 1 bis 3 summiert.)

(a) Berechnen Sie explizit die Komponenten c_1, c_2, c_3 von $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

(b) Berechnen Sie:

$$\varepsilon_{123}\varepsilon_{213} + \varepsilon_{113} + \varepsilon_{321}\varepsilon_{313} + \varepsilon_{312} \tag{1}$$
$$\varepsilon_{i12}\varepsilon_{i21} \tag{2}$$
$$\varepsilon_{i12}\varepsilon_{i23} \tag{3}$$
$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} \tag{4}$$

(c) Seien $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie mit Hilfe von $c_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k$ folgende Identitäten:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \tag{5}$$
$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \tag{6}$$
$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \tag{7}$$

(d) Sei $\mathbf{a}$ ein Vektorfeld und ∇ der Nablaoperator $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)^T$. Zeigen Sie folgende Identität

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^{\mathbf{2}} \mathbf{a}$$

.

(e) Zeigen Sie, dass das über $c_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k$ berechnete Kreuzprodukt zweier Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ senkrecht zu $\mathbf{a}$ und zu $\mathbf{b}$ steht.

Hinweis: $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$

Bitte wenden $\longrightarrow$

Aufgabe 2 : *Koordinatensysteme*
Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) sind definiert durch

$$\begin{aligned} x &= \rho \ \cos\varphi, \\ y &= \rho \sin\varphi, \\ z &= z, \end{aligned}$$

wobei (x, y, z) die kartesischen Koordinaten bezeichnen.

(a) Berechnen Sie die Koordinatenbasis.

(b) Berechnen Sie die Skalarprodukte der Basisvektoren.

(c) Berechnen Sie den Nablaoperator in diesen Koordinaten.

Aufgabe 3 : *Bahnkurve im Schwimmbad*

Paul sieht im Schwimmbad eine Rutsche in der Form einer Schraubenlinie. Als angehender Physiker möchte er nichts dem Zufall überlassen. Vor der Rutschpartie überlegt er sich daher Folgendes: Wenn ich, idealisiert als Massenpunkt der Masse m, mit der Kreisfrequenz ω auf dieser Schraubenlinie mit dem Radius R um die z-Achse herumrutsche, bedeutet dies, dass die Projektion der Bahnkurve auf die x, y-Ebene eine Kreisbahn mit dem Radius R ist. Falls meine Geschwindigkeit in z-Richtung den Betrag v_z hat und ich zum Zeitpunkt $t = 0$ den Punkt $\mathbf{P} = (R, 0, 0)$ passiere kann ich mir meine Bahn im Vorhinein überlegen. Du kannst Paul nun dabei helfen:

(a) Gib die Bahnkurve für diese Bewegung an.

(b) Bestimme die Geschwindigkeit und die Beschleunigung von Paul und gib seine Komponenten bezüglich einer Basis aus Zylinderkoordinaten an.

(c) Wo hat Paul die maximale Geschwindigkeit in x-Richtung?

(d) Berechne die in der Zeit t zurückgelegte Weglänge $s(t) = \int_0^t |\frac{d\mathbf{r}(t')}{dt'}|dt'$ und drücke **r** als Funktion von s aus. Wie lang ist der zurückgelegte Weg nach einem vollen Umlauf auf der Schraubenlinie?

(e) Berechne die Tangenten-,Normalen- und Binormalen-Einheitsvektoren $\hat{\mathbf{t}}$, $\hat{\mathbf{n}}$ und $\hat{\mathbf{b}}$, die das begleitende Dreibein bilden.

Hinweis:
Die Tangenten-,Normalen- und Binormalen-Einheitsvektoren sind wie folgt definiert:

$$\hat{\mathbf{t}} = \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds}, \quad \hat{\mathbf{n}} = \frac{d\mathbf{t}(s)}{ds}/|\frac{d\mathbf{t}(s)}{ds}|, \quad \hat{\mathbf{b}} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$$

- Vorlesung: Di 08:00-10:00 im EW 203 (PN 203) und Mi 08:00-10:00 im EW 203 (PN 203)

  Tutorien: Mo 12:15-13:45 EW 731; Die 12:15-13:45 EW 182, 14:15-15:45 EW 016; Mi 14:15-15:45 EW 229; Do 10:15-11:45 EW 226, 14:15-15:45 EW 182; Fr 10:15-11:45 EW 016, 12:15-13:45 EW 731

- **Kontakt, Inhalte, Übungsblätter etc.:**
  http://www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/lv/ws0708/pvbs/mechanik/uebungen/

- **Sprechstunde:** F. Milde Fr 14.00-15.00 Uhr, EW 703; R. Vogel Do 11.00-12.00 Uhr, EW 702; C. David Mo 14.30-15.30 Uhr, EW 060; U. Dang Do 10.00-11.00 Uhr, EW 060; C. Wollin ???, EW 146