Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik

3. Dezember 2007

Prof. Dr. H. Stark
Dipl.-Phys. Frank Milde
Dipl.-Phys. Reinhart Vogel

www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/lv/ws0708/pvbs/mechanik/
Tutoren: Uyen Dang, Christin David und Christopher Wollin

8. Übungsblatt zur Theoretische Physik I: Mechanik

Abgabe: bis Mittwoch 12.12.2006 8:30 Uhr in der VL.

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte den Namen des Tutors auf die Aufgabenzettel raufschreiben.

Aufgabe 22 (5 Punkte): *Tensoren*

Tensoren zweiter Stufe sind "*Maschinen*" die aus einem Vektor $\underline{a}$ einen Vektor $\underline{b} = \underline{\underline{T}}\ \underline{a}$ machen. wichtig dabei ist, dass diese Abbildung linear ist. D.h. es gilt:

$$\underline{\underline{T}}(p\underline{a} + q\underline{b}) = p\underline{\underline{T}}\ \underline{a} + q\underline{\underline{T}}\ \underline{b}.$$

Ein Beispiel ist der Trägheitstensor, welcher der Winkelgeschwindigkeit $\underline{\omega}$ eines starren Körpers dessen Drehimpuls $\underline{L}$ zuordnet; i.A. sind $\underline{\omega}$ und $\underline{L}$ nicht parallel.

1. Entwickeln Sie $\underline{a}$, $\underline{b}$ nach der ONB $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ und zeigen Sie ausgehend von $\underline{b} = \underline{\underline{T}}\ \underline{a}$, dass der Tensor $\underline{\underline{T}}$ durch Komponenten T_{ij} charackterisiert ist, die wir im folgenden in einer Matrix $\underline{\underline{T}}$ mit $\left[\,\underline{\underline{T}}\,\right]_{ij} = T_{ij}$ zusammenfassen und mit demselben Symbol darstellen, wie den "darstellungsfreien" Tensor $\underline{\underline{T}}$.

2. Das dyadische Produkt $\underline{u} \otimes \underline{v}$ macht aus zwei Vektoren $\underline{u}$, $\underline{v}$ einen Tensor zweiter Stufe. Seine Wirkung auf den Vektor $\underline{a}$ sei durch $(\underline{u} \otimes \underline{v})\underline{a} = \underline{u}(\underline{v} \cdot \underline{a})$ definiert, wobei "$\cdot$" das Skalarprodukt bezeichnet. Wie lauten die in (1) eingeführten Komponenten $(\underline{u} \otimes \underline{v})_{ij}$?

3. Die dyadischen Produkte $\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$ $(i, j = 1, 2, 3)$ bilden eine ONB im Raum der Tensoren zweiter Stufe. Zeigen Sie, dass die Entwicklung $\underline{\underline{T}} = T_{ij}\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$ konsistent mit der in (1) gefundenen Darstellung der T_{ij} ist.

4. Ein transponierter Tensor $\underline{\underline{T}}^t$ wird über

$$\underline{a} \cdot \underline{\underline{T}}\ \underline{b} := \underline{b} \cdot \underline{\underline{T}}^t \underline{a}$$

eingeführt. Wie hängen die Komponenten von $\underline{\underline{T}}^t$ mit denen von $\underline{\underline{T}}$ zusammen?

5. Für einen symmetrischen Tensor zweiter Stufe gilt: $\underline{\underline{T}}^t = \underline{\underline{T}}$ und ein antisymmetrischer Tensor erfüllt: $\underline{\underline{T}}^t = -\underline{\underline{T}}$. Was bedeutet das für deren Komponenten? Wieviele unabhängige Komponenten haben diese Tensoren jeweils? Zerlegen Sie einen allgemeinen Tensor zweiter Stufe in einen symmetrischen und antisymmetrischen Anteil. Führen Sie die Zerlegung explizit durch für

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

6. Der Einheitstensor $\underline{\underline{1}}$ ist durch $\underline{a} = \underline{\underline{1}}\ \underline{a}$ definiert. Wie lauten seine Komponenten?

7. Gilt $\underline{\underline{T}}\ \underline{a} = \lambda\underline{a}$, so nennt man $\underline{a}$ einen Eigenvektor (EV) von $\underline{\underline{T}}$ zum Eigenwert (EW) λ. Zeigen Sie, dass ein symmerischer Tensor, der nur reelle Komponenten besitzt, reelle EW $\lambda^{(i)}$ besitzt und seine EV $\underline{a}^{(i)}$ orthogonal zueinander sind. *Tipp: Man nehme* $\lambda^{(i)} \neq \lambda^{(j)}$.

Berechnen Sie die EW und EV von

$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ -4 & 7 & 4 \\ 8 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. Relle, symmetrische Tensoren haben in drei Dimensionen genau 3 EV. Warum? Berechnen Sie die Komponenten von $\underline{\underline{T}}$ bzgl. der Basis $\{\underline{a}^{(i)} \otimes \underline{a}^{(j)},\ i,j = 1,2,3\}$, wobei die $\underline{a}^{(i)}$ die auf Eins normierten EVs aus (7) sind. Wende das Ergebnis auf $\underline{\underline{B}}$ aus (7) an.

Aufgabe 23 (5 Punkte): *Auf dem Fernsehturm*

Aus dem Telecafe des Fernsehturms wird eine Kugellagerkugel fallengelassen. Beschreiben Sie diese angenähert als punktförmig und vernachlässigen Sie die Luftreibung. Für die Dauer unseres Versuches sei auch die Rotation des Cafes unterbrochen.

1. In welcher Himmelsrichtung erwarten Sie eine Ablenkung von der Lotlinie? Begründen Sie die Antwort phänomenologisch und rechnerisch!

2. Wie groß wird die Ablenkung am Boden? Die geographische Breite von Berlin ist $\theta = 52,5^{\circ}$ Nord und die Höhe des Telecafes im Fensehturmes ist $h = 207,53m$.

Tipp: Nehmen Sie an, daß der Körper senkrecht fällt und berechnen Sie aus dieser Bahnkurve die Abweichung.

Aufgabe 24 (10 Punkte): *Das Foucaultsche Pendel*

Betrachtet wird ein (linearisiertes) mathematisches Pendel, das an einem Ort mit der geographischen Breite θ über der Erdoberfläche (x-y-Ebene) schwingt. Die Winkelgeschwindigkeit der Erdrehung ist $\omega = \frac{2\pi}{24h}$ und es gelte $\omega^2 \ll \omega_0^2 = \frac{g}{l}$.
(a) Zeigen Sie ausgehend von den Ergebnissen der Vorlesung zur Corioliskraft, daß für kleine Auslenkungen aus der Ruhelage gilt:

$$\ddot{x} = -\frac{g}{l}x + 2\dot{y}\omega \sin\theta \tag{1}$$

$$\ddot{y} = -\frac{g}{l}y - 2\dot{x}\omega \sin\theta \tag{2}$$

(b) Geben Sie die Lösung $x_{\text{harm}}(t), y_{\text{harm}}(t)$ der obigen Schwingungsgleichung ohne Corioliskraft für die Anfangsbedingungen $x_{\text{harm}}(0) = r$, $y_{\text{harm}}(0) = 0$, $\dot{x}_{\text{harm}}(0) = 0$ und $\dot{x}_{\text{harm}}(0) = 0$ an.
(c) Für kleine Zeiten $t \ll \frac{1}{\omega}$ kann man in guter Näherung in den Coriolistermen der Gleichungen (1,2) $\dot{x} = \dot{x}_{\text{harm}}$ und $\dot{y} = \dot{y}_{\text{harm}}$ setzen (Störungstheorie). Bestimmen Sie damit $x(t)$ und $y(t)$ für die Anfangsbedingungen $x(0) = r$, $y(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$.
(d) Bestimmen Sie $x, \dot{x}, y, \dot{y}$ zum Zeitpunkt $t = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Um welchen Winkel hat sich die Schwingungsebene des Pendels gedreht?
(e) Skizzieren Sie die Bahnkurve des Pendels für die erste volle Schwingung und begründen Sie sie!