Technische Universität Berlin
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. K.-E.Hellwig

29.10.07
Abgabe: 09.11.07

1. Übungsblatt zur Quanteninformationstheorie I u.II

Nächste Übung: Fr.,09.11.07, 10:15, Raum PN-733

Aufgabe 1 (2 Punkte): Eine Menge $\mathcal{S}$ trägt eine konvexe Struktur, wenn gilt: (i) Aus $s_i \in \mathcal{S}$ und $0 \leq \lambda_i \in \mathbf{R}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$, $\sum_1^n \lambda_i = 1$ folgt: Es gibt genau ein Element $< \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n; s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n > \in \mathcal{S}$. (ii) Dabei gilt stets $< \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n; s, s, s, \ldots, s >= s$.
Eine Abbildung $E : \mathcal{S} \to \mathbf{R}$ heißt affines Funktional, falls

$$E(< \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n; s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n >) = \sum_1^n \lambda_i E(s_i)$$

gilt. Es sei $\mathcal{L}$ die Menge der affinen Funktionale auf $\mathcal{S}$.
(1.1) Für $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $f, g \in \mathcal{L}$ und $s \in \mathcal{S}$ sei $(\alpha f + \beta g)(s) := \alpha f(s) + \beta g(s)$. **Man zeige:** Mit dieser Definition ist $\mathcal{L}$ ein Vektorraum. Sei ferner $f \leq g$ falls $f(s) \leq g(s)$ für alle $s \in \mathcal{S}$ gilt. **Man zeige:** Mit dieser Definition ist $\mathcal{L}$ ein teilweise geordneter Vektorraum. Dazu ist neben der Reflexivität, Antisymmetrie $(f \leq g \wedge g \leq g. \Rightarrow .f = g)$ und Transitivität noch $f \leq g \wedge h \in \mathcal{L}. \Rightarrow .f + h \leq g + h$ und $0 \leq f \wedge 0 \leq \alpha \in \mathbf{R}. \Rightarrow .0 \leq \alpha f$ zu zeigen.
(1.2) Sei $\mathcal{L}^*$ der Dualraum von $\mathcal{L}$. **Man zeige:** Die Abbildung $\Upsilon : \mathcal{S} \to \mathcal{L}^*, s \mapsto \sigma$, wobei σ durch $\sigma(f) := f(s)$ definiert ist, ist affin, d. h. mit $s_i \in \mathcal{S}$ und $0 \leq \lambda_i \in \mathbf{R}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, i_n)$, $\sum_1^n \lambda_i = 1$ gilt $\Upsilon(< \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n; s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n >) = \sum_1^n \lambda_i \Upsilon(s_i)$. Überdies **zeige man;** Das Bild von $\mathcal{S}$ ist eine konvexe Menge von $\mathcal{L}^*$. Unter der zusätzlichen Voraussetzung, dass für $s, t \in \mathcal{S}$ und $f(s) = f(t)$ für alle $f \in \mathcal{L}$ die Gleichheit $s = t$ folgt, **zeige man:** Υ ist injektiv und folgere, dass $\mathcal{S}$ bijektic und affin auf $\Upsilon(\mathcal{S})$ abgebildet wird.
Die zusätzliche Voraussetzung, dass $\mathcal{L}$ separierend auf $\mathcal{S}$ ist, wird im Folgenden stets angenommen.

Aufgabe 2 (4 Punkte):
(2.1) Man zeige, dass die affine Untermannigfaltigkeit

$$\mathcal{H} := \{\varsigma | \varsigma = \sum_1^n \lambda_i \sigma_i, \lambda_i \in \mathbf{R}, \sum_1^n \lambda_i = 1, \sigma_i \in \Upsilon(\mathcal{S})\} \subseteq \mathcal{L}^*$$

das Nullfuntional $0 : \mathcal{L} \to \{0\}$ nicht enthält.
(2.2) Sei

$$\mathcal{K} := \{\varsigma | \varsigma = \sum_1^n \lambda_i \sigma_i, 0 \leq \lambda_i \in \mathbf{R}, \sigma_i \in \Upsilon(\mathcal{S})\} \subseteq \mathcal{L}^*.$$

Man zeige: $\mathcal{X} := \mathcal{K} - \mathcal{K} := \{\varsigma | \varsigma = \chi - \eta, \chi, \eta \in \mathcal{K}\} \subseteq \mathcal{L}^*$ ist mit $\varsigma' \leq \varsigma :\Leftrightarrow \varsigma - \varsigma' \in \mathcal{K}$ ein teilweise geordneter Vektorraum.
(2.3) Man zeige: Jedes affine Funktional aus $\mathcal{L}$ lässt sich eindeutug zu einem beschränkten linearen Funktional auf $\mathcal{X}$ fortsetzen. Insbesondere sei $\mathbf{1}$ die Fortsetzung von von $\mathcal{S} \to \{1\}$. Die Punkte von $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{X}$ sind nun durch $\mathbf{1}(x) = 1$ bestimmt und bilden somit eine Hyperebene in $\mathcal{X}$

Aufgabe 3 (4 Punkte): In den ersten zwei Aufgaben haben wir topologische Forderungen beiseite gelassen. Man führt jedoch eine Distanzfunktion auf $\mathcal{S}$ ein und fordert die Vollständigkeit, so dass für $s_i \in \mathcal{S}$ und $0 \leq \lambda_i \in \mathbf{R}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots)$, $\sum_1^\infty \lambda_i = 1$ als Grenzwert auch $< \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n, \ldots; s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, \cdots > \in \mathcal{S}$ ist (σ- konvexe Struktur). Dann folgert man die Vollständigkeit von $\mathcal{X}$ in der Norm $\|.\|$, die in (3.1) eingeführt wird.
(3.1) Man zeige: Durch

$$\|\varsigma\| := \inf\{\max\{\alpha, \beta\} | \varsigma = \alpha\sigma - \beta\sigma', 0 \leq \alpha \in \mathbf{R}, 0 \leq \beta \in \mathbf{R}, \sigma, \sigma' \in \Upsilon(\mathcal{S})\}$$

ist eine Norm auf $\mathcal{X}$ definiert.
(3.2) Man zeige: Durch

$$\|\varsigma\|_1 := \inf\{\alpha + \beta | \varsigma = \alpha\sigma - \beta\sigma', 0 \leq \alpha \in \mathbf{R}, 0 \leq \beta \in \mathbf{R}, \sigma, \sigma' \in \Upsilon(\mathcal{S})\}$$

ist auch eine Norm auf $\mathcal{X}$ definiert. Die Normen $\|.\|$ und $\|.\|_1$ sind äquivalent.
(3.3) Man zeichne für den Fall $\dim \mathcal{X} = 2$ (z.B. klassisches Bit) in eine Skizze die durch $\mathcal{H}$, $\Upsilon(\mathcal{S})$, $\mathcal{K}$, $\|\varsigma\| \leq 1$ und $\|\varsigma\|_1 \leq 1$ bestimmten Punktmengen ein.
(3.4) Betrachte den mit der Norm $\|.\|_1$ versehenen Zustandsraum $\mathcal{X}$. **Man zeige**: Der Raum der beschränkten linearen Funktionale $v : \mathcal{X} \to \mathbf{R}$, $\mathcal{X}'$, wird durch

$$\|v\| := \sup_{x \in \mathcal{X}} \frac{v(x)}{\|x\|_1}$$

mit einer Norm versehen und ist ebenfalls vollständig. Überdies ist $\mathcal{X}'$ mit

$$v' \leq v \quad :\Leftrightarrow \quad v - v' \in \mathcal{K}', \quad \mathcal{K}' := \{v | x \in \mathcal{K} \Rightarrow v(x) \geq 0\}$$

ein teilweise georneter Vektorraum.
(3.5) Man zeige: In $\mathcal{X}'$ gilt

$$\|v\| \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad -\mathbf{1} \leq v \leq \mathbf{1}.$$

Dabei ist $\mathbf{1}$ das in (2.3) eingeführte Funktional.