Technische Universität Berlin
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. K.-E.Hellwig

29.10.07
Abgabe: 17.12.07

3. Übungsblatt zur Quanteninformationstheorie I u.II

Nächste Übung: Fr.,17.12.07, 10:00, Raum PN-733

Aufgabe 7 (2 Punkte): **Man zeige,** dass für $\rho \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$ mit der für alle $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$ geforderten Gültigkeit der Gleichung $\mathrm{tr}((A \otimes \mathbf{1})\rho) = \mathrm{tr}_1(A\mathrm{tr}_2(\rho))$ die partielle Spur über $\mathcal{H}_2$ durch

$$\rho_1 = \mathrm{tr}_2\rho = \sum_{i,j,k} |\varphi_i >< \varphi_i \otimes \psi_k, \rho(\varphi_j \otimes \psi_k) >< \varphi_j|$$

festliegt, wobei $\{\varphi_i\}$ bzw. $\{\psi_i\}$ beliebige Orthonormalbasen von $\mathcal{H}_1$ bzw. $\mathcal{H}_2$ sind.

Aufgabe 8 (4 Punkte): Ein Ring ist eine Menge R mit zwei Kompositionen, $(R, +, \cdot)$, wobei $(R, +)$ eine abelsche Gruppe ist, $(R, \cdot)$ eine Halbgruppe ist und die Distributivgesetze $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ gelten. Er heißt kommutativ, wenn überdies $a \cdot b = b \cdot a$ gilt. Ein Boolescher Ring ist ein kommutativer Ring, der ein Einselement enthält und überdies alle Elemente idempotent sind, d.h. stets $a \cdot a = a$ gilt.
(8.1) Man zeige: Sei $\mathcal{A}$ eine Mengenalgebra, dann ist $(\mathcal{A}, +, \cdot)$, wobei "+" durch $a + b := a \setminus b \cup b \setminus a$ und "·" durch $a \cdot b := a \cap b$ definiert sind, ein Boolescher Ring.
(8.2) Speziell betrachte man die Potenzmenge einer einelementigen Menge, wobei man 0 für die leere Menge und 1 für die gesamte Menge schreibe. **Man stelle** die Kompositionstabellen für "+" und "·" auf.
(8.3) Speziell betrachte man $\mathcal{A}$ als die Potenzmenge einer nicht leeren Menge Ω und definiere für $\omega \in \Omega$

$$\begin{aligned} \omega^* : \mathcal{A} &\longrightarrow \{0, 1\} \\ a &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad \omega \in a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned} .$$

Man zeige: ω^* ist ein Homomrphismus des Booleschen Ringes $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ auf den Boolschen Ring $(\{0, 1\}, +, \cdot)$ von Aufgabe (8,2).

Aufgabe 9 (4 Punkte): Betrachte in $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, $\dim \mathcal{H}_1 = \dim \mathcal{H}_2$, Orthonormalbasen $\{\varphi_i\}$ von $\mathcal{H}_1$ bzw. $\{\psi_i\}$ von $\mathcal{H}_2$, $(i = 0, 1, 2, \ldots)$.
(9.1)Man zeige: Die lineare Abbildung von $\mathcal{H}_1 \otimes \{\psi_1\}$ in $\mathcal{H}_2$, die durch $\varphi_i \otimes \psi_1 \mapsto \varphi_i \otimes \psi_i$ bestimmt ist, lässt sich zu einer unitären Transformation S auf $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ fortsetzen. Zur Veranschaulichung schreibe man für $\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^2$ die Matrizen der entsprechenden Fortsetzungen in der Computerbasis hin.
(9.2) Für einen beliebigen Zustand $\phi = \sum_i c_i\varphi_i$, $\|\phi\| = 1$, berechne die partiellen

Spuren des Dichteoperators $S|\phi \otimes \psi_1 >< \phi \otimes \psi_1|S^+$.

(9.3) Man zeige: Bei Messungen der Observablen $A = \sum_i (i+1)|\varphi_i >< \varphi_i|$ bzw. $B = \sum_i (i+1)|\psi_i >< \psi_i|$ an einem der Teilsysteme im Zustand $S|\phi \otimes \psi_1 >< \phi \otimes \psi_1|S^+$ des Gesamtsystems treten nur die von Null verschiedenen Werte j auf, für die $< \phi|\varphi_{j-1} > \neq 0$ ist, und diese Werte von A und B sind strikt korreliert, d.h. $\mu((\{j\}, \mathbf{N}_0)|(\mathbf{N}_0), \{k\}) = u((\mathbf{N}_0, \{k\})|(\{j\}, \mathbf{N}_0)) = \delta_{jk}$.