

4. Übungsblatt zur Quanteninformationstheorie I u.II

Nächste Übung: Fr.,07.01.08, 10:00, Raum PN-733

Aufgabe 10 (3 Punkte): Man betrachte einen Hilbertraum \mathcal{H} , $\dim \mathcal{H} = M$, **und zeige:** In $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ gibt es genau dann eine Orthonormalbasis maximal verschränkter Zustände Φ_ν , $\nu = 0, 1, 2, \dots, (M^2 - 1)$, genau dann, wenn es in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ein System unitärer Operatoren U_ν mit $\text{tr}(U_\nu^+ U_\mu) = M \delta_{\nu\mu}$ gibt.

Aufgabe 11 (5 Punkte): **(11,1)** Man betrachte einen Hilbertraum \mathcal{H} , $\dim \mathcal{H} = M$, und in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ein System K_ν , $\nu = 0, 1, 2, \dots, (M^2 - 1)$, von Operatoren sowie einen positiven, invertierbaren Operator R . **Man zeige:** Es gilt

$$\text{tr}(K_\nu^+ R^{-1} K_\mu) = \delta_{\nu\mu} \iff (\forall C \in \mathcal{L}(\mathcal{H})) \sum_{\nu=0}^{M^2-1} K_\nu^+ C K_\nu = \text{tr}(RC) \mathbf{1}.$$

(11,2) Für $\mathcal{H} \cong \mathbf{C}^M$ betrachte man in $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ den maximal verschränkten Zustand $\Omega = (1/\sqrt{M}) \sum |kk\rangle$. Sei $Q \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ und $z \in \mathbf{C}$. **Man zeige:** In $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ gilt

$$(\forall \varphi, \psi \in \mathcal{H}) \langle \varphi \otimes \Omega, (\mathbf{1} \otimes Q \otimes \mathbf{1})(\psi \otimes \Omega) \rangle = z \langle \varphi, \psi \rangle \iff Q = zM\mathbf{1}.$$

Aufgabe 12 (2 Punkte): **Man berechne** die Shannon Entropie der ersten Strophe des Weihnachtsliedes "Oh Tannenbaum", wobei Lerrstellen und Interpunktionszeichen als Zeichen des Alphabets gezählt werden,