Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik
http://www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/lv/ws08090/pvbs/mech/

14. Oktober 2008

Prof. Dr. Tobias Brandes
Dipl. Phys. Valentin Flunkert

Malte Langhoff, Miriam Mähl,
Maria Richter, David Rosin

1. Übungsblatt zur Theoretische Physik I Mechanik

Abgabe: Montag 27.10. bis 11:00 in den Briefkasten
Unbedingt den eigenen Namen und Matrikelnr. sowie den Namen des Tutors und das Tutorium angeben. **Der Zettel wird sonst nicht korrigiert!** Es werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte.

Aufgabe 1 (10 Punkte): *Wiederholung: Differentiation im* $\mathbb{R}^3$

1. Berechnen Sie den Gradienten der skalaren Felder:

   a) $\phi = xy + yz + zx,$ b) $\phi = e^{-x} \sin y.$

2. Berechnen Sie die Divergenz der Vektorfelder:

   a) Ortsvektor $\mathbf{r} = (x,\, y,\, z),$ b) $\mathbf{A} = (xyz,\, xyz,\, xyz),$

3. Berechnen Sie die Rotation der Vektorfelder:

   a) $\mathbf{A} = (xyz,\, xyz,\, xyz),$ b) $\mathbf{A} = (x^2,\, y^2,\, z^2).$

4. Zeigen Sie, dass das Vektorfeld $\mathbf{A} = (2x + y,\, x,\, 2z)$ konservativ ist und geben Sie ein Potential an.

Aufgabe 2 (10 Punkte): *Kurvenintegral und Satz v. Stokes*

1. Berechnen Sie das Kurvenintegral des Vektorfeldes $\mathbf{A} = (-2y,\, x,\, z)$ entlang der Kurve $x = t,\ y = t^2,\ z = t^3$ für $0 \leq t \leq 1.$

2. Verwenden Sie den Satz von Stokes, um das Kurvenintegral

   $$\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

   zu berechnen, wobei $\mathbf{A} = (2x - y,\, -yz^2,\, -y^2 z)$ ist und L die Kurve ist, die durch die Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ beschrieben wird.

Aufgabe 3 (10 Punkte): *Ellipsen*
Aus der Vorlesung ist für eine Bahnkurve in einem allgemeinen Zentralpotential $V(r)$ der Winkel ϕ als Funktion des Radius r bekannt

$$\phi(r) + c = \int \frac{L/r^2}{\sqrt{2m[E - V(r)] - L^2/r^2}}\, dr,$$

wobei c eine Integrationskonstante ist.

1. Lösen Sie das Integral explizit für das Gravitationspotential $V(r) = -GMm/r$.
   Hinweis: Verwenden Sie die Substitution $y = 1/r$ *und* $\int \frac{dx}{\sqrt{\gamma^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{\gamma}$.

2. Setzen Sie $c = -\pi/2$ (Warum geht das?) und stellen Sie die Lösung in der üblichen Ellipsenform
   $$r(\phi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\phi)}$$
   dar. Geben Sie den Parameter p und die numerische Exzentrizität ε an.

Aufgabe 4 (10 Punkte): *Zylinderkoordinaten*
Die Zylinderkoordinaten ρ, ϕ, z eines Punktes mit den kartesische Ortskoordinaten $\mathbf{r} = (x,\ y,\ z)$, werden durch folgende Transformation eingeführt:

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad z = z\,.$$

1. Berechnen Sie die Einheitsvektoren $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\phi$ und $\mathbf{e}_z$ der Zylinderkoordinaten und drücken Sie den Ortsvektor $\mathbf{r}$ durch diese Einheitsvektoren aus (dies ist die Darstellung des Vektors in Zylinderkoordinaten).

2. Betrachten Sie einen Massepunkt (Masse m), der sich auf einer Bahnkurve $\mathbf{r}(t)$ bewegt und berechnen Sie die Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$ in ZK.

3. Bestimmen Sie den Drehimpulses in ZK. Wie hängt die Drehimpulserhaltung mit dem Flächensatz
   $$\rho^2 \dot{\phi} = \text{const.}$$
   zusammen?

4. Ermittlen Sie die kinetische Energie T des Massepunkts in ZK.

5. **Bonus (6 Punkte):** Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem
   $$\frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$
   mit $q_1 = \rho$, $q_2 = \varphi$ und $q_3 = z$ äquivalent zu den Newtonschen Bewegungsgleichungen eines freien Teilchens ist.