Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik 7. November 2008
http://www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/lv/ws08090/pvbs/mech/

Prof. Dr. Tobias Brandes
Dipl. Phys. Valentin Flunkert

Malte Langhoff, Miriam Wegert,
Maria Richter, David Rosin

4. Übungsblatt zur Theoretische Physik I Mechanik

Abgabe: Montag 17.11. bis 12:00 in den Briefkasten
Unbedingt den eigenen Namen und Matrikelnr. sowie den Namen des Tutors und das Tutorium angeben. **Der Zettel wird sonst nicht korrigiert!** Es werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte.

Aufgabe 11 (10 Punkte): *Lagrange-Funktion eines geladenen Teilchens*
In der Elektrodynamik lassen sich das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ und die magnetische Induktion $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ durch das skalare Potential $\phi(\mathbf{r})$ und das Vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ ausdrücken:

$$\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\,\phi - \partial_t \mathbf{A}, \qquad \mathbf{B} = \mathrm{rot}\mathbf{A}.$$

Die Lagrange-Funktion für ein Teilchen mit Ladung e im EM-Feld ist dann gegeben durch

$$L(\mathbf{r},\, \dot{\mathbf{r}},\, t) = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - e\,\phi(\mathbf{r},\, t) + e\,\dot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r},\, t)$$

Zeigen Sie, dass die Euler-Lagrange-Gleichungen die Newtonschen Gleichungen mit Lorentz-Kraft ergeben:

$$m\,\ddot{\mathbf{r}} = e\,(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{B}).$$

Tipp: Berechnen Sie die **totale** *Zeitableitung* $\frac{d}{dt}\mathbf{A}(\mathbf{r}(t), t)$.
Benutzen Sie außerdem den ε*-Tensor, oder berechnen Sie zunächst* $\dot{\mathbf{r}}\times(\nabla_{\mathbf{r}}\times\mathbf{A})$.

Aufgabe 12 (10 Punkte): *Noether-Theorem: helikoide Symmetrie*
Gegeben sei ein Teilchen der Masse m mit dem Ortsvektor $\mathbf{r}$, das sich unter dem Einfluss des Potentials $V(r,\phi,z)$ (r, ϕ und z sind Zylinderkoordinaten) auf der Oberfläche eines unendlich ausgedehnten Kreiszylinders mit dem Radius R und der Symmetrieachse $\mathbf{e}_z$ bewegen möge. Das Potenzial $V(r,\phi,z)$ besitze die helikoide Symmetrie einer Schraubenlinie mit der Ganghöhe b:

$$V(r,\phi,z) = V(r,\phi+\alpha, z+\frac{b}{2\pi}\alpha) \qquad \text{für} \qquad \alpha\in\mathbb{R}$$

Bestimmen Sie mit Hilfe des Noether-Theorems die Erhaltungsgröße, die sich aus der helikoiden Symmetrie des Potentials $V(r,\phi,z)$ ergibt.

Aufgabe 13 (10 Punkte): *Kepler-Applet: Periheldrehung*
In Aufgabe 5. hatten Sie gezeigt, dass die erste relativistische Korrektur des $1/r$ potentials $\delta V(r) = -\gamma/r^3$ zu einer Änderung des Perihelwinkels um

$$\delta\phi = \frac{6\pi\gamma}{\alpha p^2} \text{ führt, wobei } \gamma = G^2M^2\mu p/c^2, \;\; \alpha = GM\mu,$$

und M die Gesamtmasse des Systems und μ die reduzierte Masse ist.

1. Berechnen Sie für den Merkur $p_{☿} = 5.5\cdot 10^{10}m$ den Winkel $\delta\phi_{☿}$ in Bogensekunden. Benötigen Sie zur Berechnung die Masse des Merkurs?
2. Der Pulsar `PSR 1913+16` bildet mit einem weiteren Neutronenstern ein Doppelsternsystem. Verwenden Sie die Werte aus Wikipedia[1] um die Periheldrehung des Pulsars zu berechnen. Um wieviel Grad dreht sich die Bahn pro Erdenjahr?
Tipp: Verwenden Sie den minimalen und maximalen Abstand zwischen den Sternen um den Parameter p *über die Ellipsengleichung zu bestimmen.*
3. Bearbeiten Sie die Onlineaufgabe zum Keplerapplet, die auf der Homepage gestellt wird.

[1] `http://en.wikipedia.org/wiki/PSR_B1913\%2B16`

Aufgabe 14 (10 Punkte): *Variation in mehreren Dimensionen: hängende Membran*
Wir betrachten eine elastische Membran, die in einer Berandung R in der $x-y$-Ebene eingespannt sei. Kleine Auslenkungen der Membran aus dieser Ebene werden durch eine Funktion $z(x,y,t)$ beschrieben und bewirken eine zusätzliche Spannung der Membran, die zu einer Flächenstreckung führen. Die Arbeit, die dabei verrichtet wird, ist proportional zur Flächenänderung. Dies führt zu der Gleichung

$$V[z,t] = \int_G \left[\frac{1}{2}\tau^2\Big(\left(\frac{\partial z(x,y,t)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z(x,y,t)}{\partial y}\right)^2\Big) + g\rho z(x,y,t)\right] dx\,dy$$

für die potentielle Energie der Membran im Schwerefeld. G sei dabei das von R berandete Gebiet in der Ebene, τ die Spannung der Membran in der Ruhelage und ρ die Flächendichte der Membran. Die kinetische Energie der Membran ist gegeben durch

$$T[z,t] = \int_G \frac{1}{2}\rho(\frac{\partial z(x,y,t)}{\partial t})^2 dx\,dy.$$

1. Das Wirkungsfunktional, das für die Membran resultiert, hat die Form

   $$S[z] := \int_{t_0}^{t_1} [T[z,t] - V[z,t]]\; dt.$$

   Zeigen Sie, dass die Euler-Lagrange-Gleichung für die Membran von der Form

   $$\Delta z(x,y,t) - \frac{\rho}{\tau^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} z(x,y,t) = \frac{g\rho}{\tau^2}$$

   ist. Benutzen Sie dazu die in der VL hergeleiteten Euler-Lagrange-Gl. für mehrere Dimensionen.

2. Lösen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen für den statischen Fall im kreisförmigen Gebiet $G = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Wählen Sie die Integerationskonstanten so, dass z stetig ist, und die Randbedingung erfüllt.
   Tipp: Der Laplace-Operator ist in Polarkoordinaten für eine Funktion die nicht von ϕ abhängt gegeben durch

   $$\Delta z(r) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial z(r)}{\partial r}\right).$$