5. November 2008

Technische Universität Berlin
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. Harald Engel
Dipl.-Phys., Dipl.-Math. Philipp Hövel

http://www.itp.tu-berlin.de/?stat_stat_physii_ws08

3. Übungsblatt – Statistische Physik II

Abgabe: Do. 13.11.2008 vor der Übung

Aufgabe 6 (30 Punkte): *Turing-Muster im Brüsselator-Modell*

1. Betrachten Sie die reaktionskinetischen Gleichungen für die Konzentrationen der diffundierenden Zwischenprodukte X und Y im Fall der folgenden chemischen Reaktion:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{X}}{\partial \tilde{t}} &= k_1\tilde{A} - (k_2\tilde{B} + k_4)\tilde{X} + k_3\tilde{X}^2\tilde{Y} + \tilde{D}_1\nabla^2\tilde{X} \\ \frac{\partial \tilde{Y}}{\partial \tilde{t}} &= k_2\tilde{B}\tilde{X} - k_3\tilde{X}^2\tilde{Y} + \tilde{D}_2\nabla^2\tilde{Y},\end{aligned}$$

   wobei die Konstanten k_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ Reaktionskonstanten bezeichnen.
   Führen Sie dimensionslose Variable entsprechend $t = k_4\tilde{t}$, $X = \sqrt{k_3/k_4}\tilde{X}$, $Y = \sqrt{k_3/k_4}\tilde{Y}$, $A = \sqrt{k_1^2 k_3/k_4^3}\tilde{A}$, $B = k_2/k_4\tilde{A}$, und $D_i = \tilde{D}_i/k_4$ $(i = 1, 2)$ ein.
   Setzen Sie A im Folgenden konstant und fassen Sie B als Bifurkationsparameter auf.

2. Untersuchen Sie die Stabilität des homogenen stationären Zustands (HSS) gegen hinreichend kleine räumlich homogene Störungen in Abhängigkeit von B.

3. Die diffusionsgetriebene Turing-Instabilität tritt dann auf, wenn der gegen räumlich homogene Störungen stabile HSS durch räumlich inhomogene Störungen einer bestimmten Wellenzahl k destabilisiert wird.
   Hinweis: Betrachten Sie den eindimensionalen Fall, d.h. $\nabla^2 = \frac{d^2}{dr^2}$*, in einem System der Länge* L*.*
   Bestimmen Sie die Instabilitätskurve $B(k)$ aus der Bedingung, dass ein reeller Eigenwert λ der charakteristischen Gleichung durch Null läuft. Zeigen Sie, dass das Minimum dieser Kurve durch

$$\begin{aligned}B_{cr} &= \left[1 + A\sqrt{\frac{D_1}{D_2}}\right]^2 \\ k_{cr}^2 &= \frac{A}{\sqrt{D_1 D_2}}\end{aligned}$$

   gegeben ist.
   Für welche Parameter ereignet sich die Hopf-Bifurkation vor der Turing-Bifurkation?
   Hinweis: Im unendlich ausgedehnten System kann man die Abweichungen vom HSS zu $\exp(ikr + \lambda(k)t)$ *setzen und die Randbedingungen umgehen.*