12. November 2008

Technische Universität Berlin
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. Harald Engel
Dipl.-Phys., Dipl.-Math. Philipp Hövel

http://www.itp.tu-berlin.de/?stat_stat_physii_ws08

4. Übungsblatt – Statistische Physik II

Abgabe: Do. 20.11.2008 vor der Übung

Aufgabe 7 (24 Punkte): *Reaktionsfronten im Schlögl-Modell*

1. Betrachten Sie ein Reaktionsdiffusionssystem mit bistabiler Kinetik entsprechend

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = f\big(u(x,t)\big) + D\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

mit $f\big(u(x,t)\big) = -k\,[u(x,t)-u_1]\,[u(x,t)-u_2]\,[u(x,t)-u_3]$, wobei gilt: $u_1 < u_2 < u_3$ und $k, D > 0$. Beweisen Sie unter Verwendung des Lösungsansatzes aus der Vorlesung die Ergebnisse für das Frontprofil

$$u(\zeta) = \frac{u_1+u_3}{2} + \frac{u_1-u_3}{2}\tanh\left(\sqrt{\frac{k}{2D}}\frac{u_1-u_3}{2}\zeta\right)$$

mit $\zeta = x - ct$ und die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Reaktionsfront

$$c = \sqrt{\frac{kD}{2}}\,(u_1+u_3-2u_2)$$

für den Übergang von u_3 nach u_1.
Hinweis: Prüfen Sie, ob das Frontprofil die Differentialgleichung und die Randbedingungen erfüllt.

2. Verifizieren Sie auch den Ausdruck für die Frontbreite

$$L = 4\sqrt{\frac{2D}{k}}\,(u_3-u_1)^{-1}$$

und skizzieren Sie die Frontlösung in der $\left(u, \frac{du}{d\zeta}\right)$-Phasenebene.

Aufgabe 8 (10 Punkte): *Bonusaufgabe zum Schlögl-Modell*
Das Eigenwertproblem für den linearen Stabilitätsoperator ist einer Schrödinger-Gleichung für die eindimensionale Bewegung eines Massepunktes äquivalent. Bestimmen Sie das entsprechende Potenzial im Fall des Schlögl-Modells und stellen Sie es grafisch dar.