20. November 2008

Technische Universität Berlin
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. Harald Engel
Dipl.-Phys., Dipl.-Math. Philipp Hövel

http://www.itp.tu-berlin.de/?stat_stat_physii_ws08

5. Übungsblatt – Statistische Physik II

Abgabe: Do. 27.11.2008 vor der Übung

Aufgabe 9 (30 Punkte): *Erregungspulse im FitzHugh-Nagumo-Modell*

Betrachten Sie als Beispiel eines Reaktionsdiffusionssystems das FitzHugh-Nagumo-Modell entsprechend

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} &= 3u(x,t) - u(x,t)^3 - v(t) + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \\ \frac{\partial v(t)}{\partial t} &= \varepsilon[u(x,t) - \delta], \end{aligned}$$

wobei der Parameter der Zeitskalentrennung ε klein ist ($\varepsilon \ll 1$).

1. Zeichnen Sie die Isoklinen und analysieren Sie die Stabilität des Fixpunkts.

2. Für den Grenzfall $\varepsilon \to 0$ bleibt die Inhibitorkonzentration v in der Pulsfront konstant. Beweisen Sie den folgenden Ausdruck für die Pulsgeschwindigkeit:

$$c_0 = \sqrt{2}\left(-1.5\cos\frac{\varphi}{3} + 3\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\varphi}{3}\right) \qquad \text{mit} \qquad \cos\varphi = \frac{v}{2}$$

   und stellen Sie die Funktion $c_0(v)$ grafisch dar.
   Hinweis: Verwenden Sie die Cardano'sche Formel zur Bestimmung von Nullstellen eines kubischen Polynoms, sowie die Ergebnisse zum Schlögl-Modell.

3. Bei unvollständiger Skalentrennung gilt die Annahme einer konstanten Inhibitorkonzentration $v = v_0 = const.$ nicht mehr und die Pulsgeschwindigkeit c ist eine Funktion von ε. Berechnen Sie die lineare Korrektur zur Pulsgeschwindigkeit durch Störungsrechnung entsprechend

$$\begin{aligned} c(\varepsilon) &= c_0 + \varepsilon c_1 + \ldots \\ u(\zeta) &= u_f(\zeta) + \varepsilon u_1(\zeta) + \ldots \\ v(\zeta) &= v_0 + \varepsilon v_1(\zeta) + \ldots \end{aligned}$$

   und beweisen Sie den Ausdruck

$$c_1 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} d\zeta u_f'(\zeta)\, e^{c_o\zeta}\, v_1(\zeta)}{\int_{-\infty}^{\infty} d\zeta u_f'(\zeta)^2 e^{c_o\zeta}} \qquad \text{mit} \qquad v_1(\zeta) = \frac{1}{c_0}\int_{\zeta}^{\zeta_0} d\zeta'[u_f(\zeta) - \delta].$$

   Begründen Sie, ob der Wert von c_1 positiv oder negativ ist.