Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik

Prof. Dr. Andreas Knorr
Dr. Kathy Lüdge
Dr. Ermin Malić
Dipl.-Phys. Frank Milde

25. November 2008

7. Übungsblatt – Thermodynamik und Statistik WS08/09

Abgabe: Di. 09.12.2008 vor der Vorlesung im EW 203

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. **Abgabe in Dreiergruppen!** *Bitte immer Namen und Matrikelnummer angeben.*

Aufgabe 15 (10 Punkte): Einsteinsche Theorie der Wärmekapazität
In der Einsteinschen Theorie der Wärmekapazität wird ein Festkörper durch N Atome beschrieben, die alle um ihre Gleichgewichtslagen schwingen. Jedes Atom besitzt dabei drei 3 Freiheitsgrade der Vibration. Eine wesentliche Annahme ist, dass die Schwingungen der Atome alle mit derselben charakteristischen Frequenz ω stattfinden. Betrachten Sie diesen idealen Kristall aus N Atomen. Die Gitterschwingungen der Atome sollen als unabhängig voneinander betrachtet werden und mit Hilfe des quantenmechanischen harmonischen Oszillators beschrieben werden. Dieser genügt der bekannten Eigenwertgleichung,

$$H|n\rangle = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})|n\rangle.$$

(a) Wiederholen Sie die Berechnung der Zustandssumme eines quantenmechanischen harmonischen Oszillators aus der Vorlesung.

(b) Bestimmen Sie die Zustandssumme für die Schwingung aller Atome des Kristalls unter der Voraussetzung, dass diese unterscheidbar sind.

(c) Berechnen Sie die innere Energie U des Kristalls. Drücken Sie diese mit Hilfe der *Einstein*-Temperatur $\Theta_E = \hbar\omega/k_B$ aus.

(d) Berechnen Sie nun die Wärmekapazität bei konstantem Volumen und diskutieren Sie den Grenzfall für $T \to 0$ und $T \to \infty$. Ergibt sich für hohe Temperaturen das *Dulong-Petitsche* Gesetz ? (Hinweis: Bei konstantem Volumen gilt nach 1. Hauptsatz $dU = \delta Q$)

(e) Stellen Sie die Wärmekapazität in Abhängigkeit der Temperatur graphisch (z.B mit *Mathematica*©) dar. Als Einheit für die x-Achse empfiehlt sich T/Θ_E und für die y-Achse $R = N \cdot k_B$.

Aufgabe 16 (10 Punkte): Ideales Gas mit inneren Freiheitsgraden
Betrachten Sie ein ideales Gas, dessen Moleküle innere Freiheitsgrade besitzen (z.B. Schwingungen). Der Phasenraum des i-ten Moleküls werde durch die Schwerpunktskoordinaten $\mathbf{Q_i}, \mathbf{P_i}$ sowie durch die Koordinaten der inneren Freiheitsgrade $q_i^1, \ldots, q_i^r; p_i^1, \ldots, p_i^r$ aufgespannt. In der harmonischen Näherung lautet die Hamiltonfunktion des idealen Gases mit N Molekülen:

$$H = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2M} P_i^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{r} (a_j (p_i^j)^2 + b_j (q_i^j)^2) \qquad a_j, b_j > 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant r$$

(a) Zeigen Sie, dass im großkanonischen Ensemble für die kalorische Zustandsgleichung des Gases gilt:

$$U(T) = \frac{3 + 2r}{2} k_B T \cdot N$$

(b) Bestimmen Sie die Wärmekapazität C_V.

(c) Wie lautet der Gleichverteilungssatz (Äquipartitionsprinzip) der Thermodynamik und in welchem Zusammenhang steht er mit de Ergebnissen aus (16a) und (15d).