Technische Universität Berlin
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. H. v. Borzeszkowski
Dr. T. Chrobok

11. Januar 2011

9. Übungsblatt zur Allgemeinen Relativitätstheorie I

Abgabe: Dienstag 25.01.11 vor der Übung

Aufgabe 1 (10 Punkte): ***Sphärisch-symmetrische Lösung der Feldgleichungen mit kosmologischer Konstante und lichtartige Geodäten***

a) Bestimmen Sie die sphärisch-symmetrische Vakuumlösung der Einsteinschen Feldgleichungen

$$R_{\alpha\beta} = -\frac{8\pi G}{c^4}(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Tg_{\alpha\beta}) + \Lambda g_{\alpha\beta}$$

im Fall, dass die kosmologische Konstante Λ ungleich Null ist.

Benutzen Sie dazu den Ansatz einer statischen, sphärisch-symmetrischen Metrik

$$ds^2 = B(r)(dx^0)^2 - A(r)dr^2 - r^2(d\Theta^2 + \sin^2\Theta d\phi^2).$$

Die nichtverschwindenden Komponenten des Ricci-Tensors lauten dann:

$$\begin{aligned}
R_{00} &= -\frac{B''}{2A} + \frac{B'}{4A}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) - \frac{B'}{rA} \\
R_{11} &= \frac{B''}{2B} - \frac{B'}{4B}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) - \frac{A'}{rA} \\
R_{22} &= -1 - \frac{r}{2A}\left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B}\right) + \frac{1}{A} \\
R_{33} &= \sin^2\Theta R_{22}.
\end{aligned}$$

b) Stellen Sie nun die Gleichungen für lichtartige Geodäten in dieser Lösung auf. Betrachten Sie dabei die Bahnebene $\Theta = \frac{\pi}{2}$ und $\dot{\Theta} = 0$. Diskutieren Sie die Unterschiede zur Schwarzschildmetrik, d.h. der Lösung des gleichen Problems ohne kosmologische Konstante.
Hinweise: Benutzen Sie zur Bestimmung der Geodäten möglichst das Variationsverfahren, denn man erhält dann direkt die ersten Integrale der Bewegung. Letztendlich sollte man eine Differentialgleichung erster Ordnung in r erhalten. Die Bewegungsgleichung für die r-Komponente erhält man am einfachsten aus der Nebenbedingung der Geodätengleichung **ohne** Benutzung des Variationsverfahrens.