Technische Universität Berlin
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. H. v. Borzeszkowski
Dr. T. Chrobok

16. November 2010

4. Übungsblatt zur Allgemeinen Relativitätstheorie I

Abgabe: Dienstag 30.11.10 vor der Übung

Aufgabe 1 (5 Punkte): *Energie-Impuls und Bahndrehimpuls*

Der elektromagnetische Feldstärke-Tensor, der in der geometrischen Optik benutzt wird lautet

$$F_{\alpha\beta} = \lambda(A_\beta k_\alpha - A_\alpha k_\beta),$$

wobei k_α ein Nullvektor (lichtartiger Vektor) ist, d.h. $k_\alpha k^\alpha = 0$ gilt, und der Eigenschaft $k_\alpha A^\alpha = 0$ genügt (λ bezeichnet eine Konstante). Durch den Ansatz bedingt ist k_α ein Gradientenfeld, d.h. $k_\alpha = S_{,\alpha}$, auf den Flächen konstanter Phase S.
a) Bestimmen Sie den Energie-Impuls-Tensor für den obigen Feldstärke-Tensor

$$T^\beta{}_\gamma = \frac{c}{4\pi}\left(F^{\alpha\beta}F_{\gamma\alpha} + \frac{1}{4}\delta^\beta{}_\gamma F^{\kappa\lambda}F_{\kappa\lambda}\right) \tag{1}$$

im Fall, dass der Betrag des Vierer-Potentials A_α auf 1 normiert ist.
b) Bilden Sie den Bahndrehimpuls-Tensor

$$M^{\alpha\beta\gamma} := x^{[\alpha}T^{\beta]\gamma} \tag{2}$$

dieses Feldes und bestimmen Sie die Energie-Impuls-Bilanz (ohne äußere Quellen) und die Bahndrehimpuls-Bilanz $M^{\alpha\beta\gamma}{}_{,\gamma} = 0$ wenn $k^\alpha{}_{,\alpha} = 0$ gilt.

Aufgabe 2 (5 Punkte): *Energie-Impuls-Bilanz eines idealen Fluids in der Speziellen Relativitätstheorie - Newtonscher Limes*

Der Energie-Impuls-Tensor eines idealen Fluids ist definiert durch

$$T^{\alpha\beta} = (\rho + \frac{p}{c^2})u^\alpha u^\beta - p\eta^{\alpha\beta},$$

wobei ρ die Massendichte, p der Druck und u^α das Geschwindigkeitsfeld der Flüssigkeit ist (in der Vorlesung eingeführt).
(i) Leiten Sie die Energie-Impuls-Bilanz $T^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0$ (kräftefreier Fall) für diesen Tensor ab.
(ii) Beweisen Sie, dass die Nullkomponente dieser Gleichung im nichtrelativistischen Grenzfall in die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \partial_i(\rho v^i) = 0 \tag{3}$$

übergeht. Vernachlässigen Sie dazu alle Terme $O(c^{-1})$ sowie $\dot{u}^\alpha$, benutzen Sie die Zerlegungen für $(u^\alpha) = \gamma(c, v^i)$ und beachten Sie, dass $\gamma \cong 1$ gilt.