Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik 14. Dezember 2010

Prof. Dr. Harald Engel,
Dipl. Phys. Stefan Fruhner, Dipl. Ing. Maximilian Schmitt, Dipl. Ing. Andreas Zöttl
Andrea Vüllings, Maria Richter, Tanja Schlemm, Eike Verdenhalven

9. Übungsblatt – Theoretische Physik I: Mechanik

Abgabe: Mi. 12.01.2011 8:15 Briefkasten ER-Geb./online über ISIS (max. 1MB)

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 22 (8 Punkte): *Zentralfeld*

(a) Geben Sie die Lagrange-Funktion für die Bewegung eines Teilchens der Masse m im Potenzial $U(|\mathbf{r}|)$ in sphärischen Koordinaten an. Welcher Erhaltungsgröße entspricht die zyklische Koordinate φ ?

(b) Auf welche Weise lässt sich das Problem auf eine eindimensionale Bewegung in einem effektiven Potenzial $U_{eff}(|\mathbf{r}|)$ abbilden.

(c) Diskutieren Sie qualitativ die möglichen Bahnkurven für die Fälle

(i) $U(r) = -\alpha/r$,
(ii) $U(r) = \alpha\, r^2$ und
(iii) $U(r) = -\alpha/r^3$,

wobei $\alpha > 0$ gilt.

Hinweis: Für Visualisierung des Potenzials ist das Kepler-Applet hilfreich, das unter folgender Internetadresse zu finden ist: `http://www.tu-berlin.de/index.php?id=8125`.

(d) Begründen Sie, für welche Potenziale alle Bahnkurven geschlossen sind.

Aufgabe 23 (12 Punkte): *Periheldrehung*

Nach der Newton'schen Gravitationstheorie ist die potenzielle Energie einer kleinen Masse m im Schwerefeld einer großen Masse M durch $V_N(r) = -\frac{\gamma m M}{r}$ gegeben (γ : Gravitationskonstante). Bewegt der kleine Körper sich allerdings sehr nahe am Zentralkörper (M), zeigt die Beobachtung, dass dieses Gesetz nicht exakt gilt. Nach der Einstein'schen Gravitationstheorie muss die Newton'sche Form des effektiven Potenzials modifiziert werden indem man einen Zusatzterm einführt. Das effektive Radialpotenzial hat dann die Form

$$V_{\text{Eeff}}(r) = \underbrace{-\frac{k}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}}_{\text{Newton}} - \underbrace{\frac{\gamma M L^2}{c^2 m r^3}}_{\text{Einstein}} \quad \text{mit } k = \gamma m M,$$

mit der Lichtgeschwindigkeit c und dem Drehimpuls L.

(a) Die resultierende *Bahngleichung* ist :

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{2mr^4}{L^2}\left(E - V_{\text{Eeff}}(r)\right)$$

Zeigen Sie, dass man für den inversen Abstand $u(\varphi) := 1/r(\varphi)$ die folgenden **Orbit-Gleichungen**

(1) ohne Einstein'schen Zusatzterm: $$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{\gamma M m^2}{L^2}$$

(2) mit Einstein'schem Zusatzterm: $$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{\gamma M m^2}{L^2} + \frac{3\gamma M}{c^2}u^2$$

erhält.

(b) Die Orbitgleichung hat im Newtonschen Fall die Lösung:

$$u_N(\varphi) = \frac{\gamma m^2 M}{L^2}(1 + \epsilon \cos\varphi).$$

Diese Lösung ist eine Ellipse mit Perihel (sonnennächster Punkt der Bahnkurve) bei $\varphi = 0$. Da für Objekte im Sonnensystem der Einfluss des Einstein'schen Zusatzterms klein ist, ist diese Lösung weiterhin eine gute Näherung. Deshalb ist es zweckmäßig den Ansatz:

$$u(\varphi) = u_N(\varphi) + \Delta u(\varphi)$$

zu wählen. Setzen Sie diesen Ansatz in die Gleichung (2) ein und bringen Sie diese auf die Form

$$\Delta u'' + \Delta u = \frac{3\gamma M}{c^2}(\Delta u^2 + 2u_N \Delta u + u_N^2).$$

Wir nehmen an, dass $\Delta u(\varphi) \ll u_N(\varphi)$ sei.

In guter Näherung gilt also:

$$\Delta u'' + \Delta u = \frac{3\gamma M}{c^2} u_N^2.$$

Lösen Sie diese lineare Differentialgleichung analytisch mit einem Computer-Algebra-System und setzen sie die Anfangswerte $\Delta u(0) = 0$ und $\Delta u'(0) = 0$ ein.

(c) Das *Perihel* eines Planeten ist der sonnennächste Punkt der Bahnkurve. Das Perihel ist daher ein lokales Maximum des Funktion $u(\varphi)$. Dieser Punkt liegt bei der korrigierten Bahnkurve nicht konstant bei $(\varphi \mod 2\pi) = 0$, sondern verschiebt sich mit jedem Umlauf des Planeten. Diese Periheldrehung ist allerdings sehr klein, so dass wir das Perihel nach einem Umlauf in der Nähe von $\varphi = 2\pi$ erwarten. Bestimmen Sie **numerisch** die Nullstelle von $u'(\varphi)$ in der Nähe von 2π, d.h. bestimmen Sie ϵ, so dass $u'(2\pi + \epsilon) = 0$ ist, für das System Sonne-Merkur (Daten siehe unten). Rechnen Sie den Wert in Bogensekunden pro Jahrhundert um, und freuen Sie sich, wenn etwa 43"/100a auf dem Bildschirm erscheinen.

Hinweis: Achten Sie darauf, dass Sie die richtige Formel für den Drehimpuls exzentrischer Bahnen benutzen. Vernachlässigt man die Exzentrizität ist das Ergebnis um etwa 2" falsch).

Bemerkung: Dieser Wert war schon Ende des 19. Jahrhunderts bekannt, konnte aber damals nicht erklärt werden. Daher war dieses Ergebnis die erste Bestätigung der neuen Einstein'schen Gravitationstheorie (Allgemeine Relativitätstheorie) im Jahr 1915.

	MERCURY	VENUS	EARTH	MARS
Mass ($10^{24} kg$)	0.330	4.87	5.97	0.642
Diameter (km)	4879	12104	12756	6792
Distance from Sun ($10^6 km$)	57.9	108.2	149.6	227.9
Orbital Period (days)	88.0	224.7	365.2	687.0
Orbital Eccentricity	0.205	0.007	0.017	0.094

(Quelle NASA: `http://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/`)