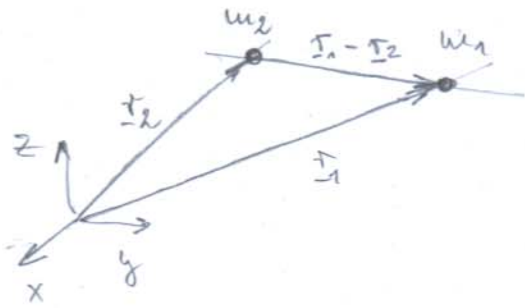
1.4.7 Newton'sches Gravitationsgesetz

Eine (Punkt)Masse m_1 am Ort $\underline{r}_1$ übt auf eine (Punkt)Masse m_2 am Ort $\underline{r}_2$ die Kraft



$$\underline{F}_G = -\gamma \frac{m_1 m_2}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|^3}(\underline{r}_1 - \underline{r}_2)$$

aus. Hier bezeichnet $\gamma = 6{,}67259\ 10^{-11}\ \mathrm{n\ m^2\ kg^{-2}}$ die universelle Gravitationskonstante.

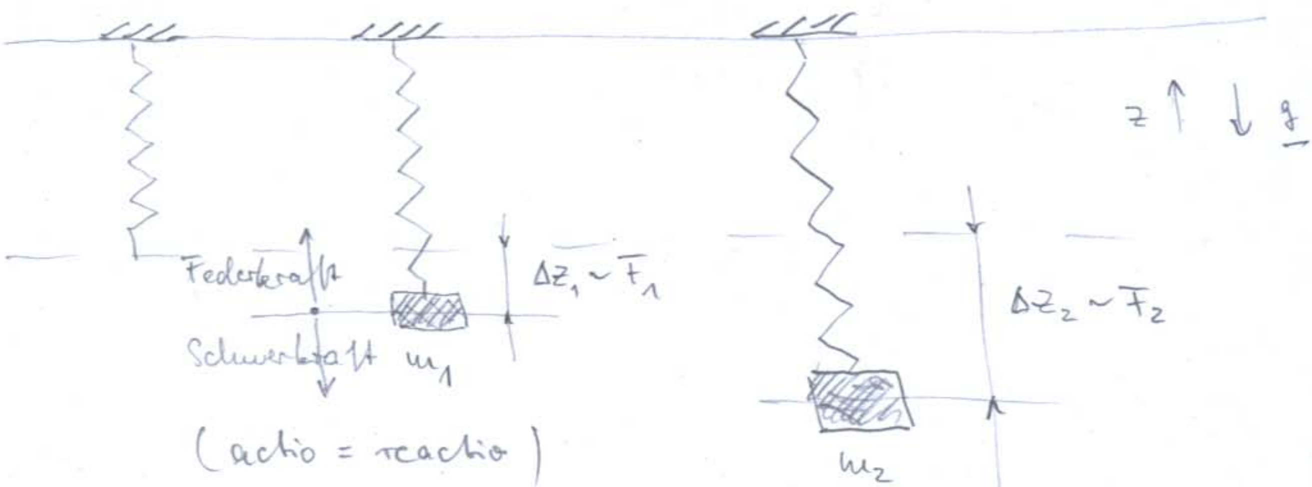
Die Gravitationskraft wirkt anziehend und in Richtung der Verbindungslinie beider Massen. Ihr Betrag hängt nur vom Abstand der Punktmassen ab. Die Gravitationswechselwirkung ist universell, langreichweitig, nicht abschirmbar und, im Vergleich zur elektrostatischen Wechselwirkung, „schwach":

■ Für zwei ruhende Elektronen gilt unabhängig vom Abstand:

$$\frac{\text{gravitative Anziehung}}{\text{elektrostatische Abstoßung}} \approx \frac{1}{4{,}17} 10^{-4}.$$

Dennoch dominiert im astronomischen Maßstab die Gravitation, da die kosmischen Objekte in der Regel elektrisch neutral sind.

<u>Gewicht eines Körpers nahe der Erdoberfläche</u> → Federwaage



Der Betrag der auf den aufgehängten Probekörper wirkenden Schwerkraft kann aus der Verlängerung Δz der Feder abgelesen werden. Die Richtung der Schwerkraft ist von der Lage des Probekörpers abhängig, sie zeigt (näherungsweise, s. oben) zum Erdmittelpunkt. Folglich ist die Schwerkraft nicht Eigenschaft des Probekörpers allein, sondern eine gemeinsame Eigenschaft des Systems Probekörper/Erde. Um die Schwere eines Probekörpers als (richtungsunabhängige) Eigenschaft seiner selbst zu charakterisieren, wird der Begriff der **schweren Masse** eingeführt durch

$$m_S \sim |\underline{F}_{Schwerkraft}| \quad \text{bzw.} \quad m_S \sim |\underline{G}|$$

Das Gewicht $\underline{G}$ eines Körpers mit m_S nahe der Erdoberfläche ist

$$\underline{G} = -\gamma \frac{m_S M}{r^3} \underline{r} = m_S \, \underline{g} \qquad \text{also} \qquad \underline{g}(\underline{r}) = -\frac{\gamma M}{r^2} \frac{\underline{r}}{r} \quad \text{für} \quad r - R << 2R \ ;$$

mit Erdmasse $M \approx 5{,}98\ 10^{24}$ kg und Erdradius $R \approx 6380$ km folgt $g \approx 9{,}81 \text{ m s}^{-2}$.

Zunächst sind die Bedingungen zur Bestimmung der trägen Masse m_T auf der Basis der NBG und der schweren Masse m_S ausgehend vom Gravitationsgesetz sehr unterschiedlich. Um m_T und m_S miteinander vergleichen zu können, betrachten wir nun die <u>Beschleunigung a eines Körpers infolge seines eigenen Gewichts</u> gemäß der NBG

$$m_T \, a = m_S \, g \qquad \text{(z-Achse in negativer g-Richtung).}$$

Bereits Galilei hatte bei seinen Fallversuchen am schiefen Turm von Pisa gefunden, dass alle Körper im Gravitationsfeld der Erde gleich schnell fallen. Newton folgerte, dass sie beim freien Fall die gleiche Beschleunigung erfahren

$a = \frac{m_S}{m_T} g = \text{const}$ → **für alle K. ist das Verhältnis aus schwerer und träger Masse gleich!**

Der Zahlenwert des Verhältnisses ist abhängig von der Wahl der Einheiten bzw. der Festlegung der Gravitationskonstanten. Werden m_T und m_S in kg gemessen folgt

$m_S = m_T = m$ Äquivalenz von träger und schwerer Masse/Äquivalenzprinzip

Die Äquivalenz von träger und schwerer Masse zählt zu den am besten experimentell gesicherten physikalischen Tatsachen. Experimentelle Verifikation von $m_S = m_T$:

(i) Pendelversuche von Newton bestätigten die Äquivalenz von träger und schwerer Masse mit einer Genauigkeit von 10^{-3}

(ii) Präzisionsdrehwaage, Cavendish 1798

(iii) Genauigkeit des Eötvös-Versuchs 10^{-11}.

- **Planetenbewegung**

N. leitet G-Gesetz aus den Kepler´schen Gesetzen der Planetenbewegung ab (vgl. MMThPh, Kap. 7.1)

NBG:	Kraft	$\leftrightarrow$	Bahnkurve
	Gravitationskraft	$\leftrightarrow$	Kepler´sche Gesetze

Die Bewegungsgleichung für einen Planeten des Sonnensystems lautet nach Newton

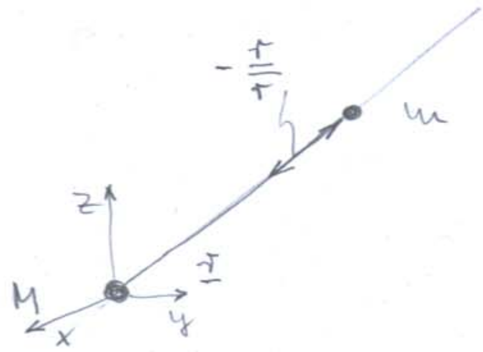
$$m_\nu \frac{d^2 \underline{r}_\nu(t)}{dt^2} = -\underline{\nabla}_\nu \sum_{\mu \neq \nu} \gamma \frac{m_\mu m_\nu}{| \underline{r}_\nu(t) - \underline{r}_\mu(t) |}.$$

- **Das Gravitations<u>feld</u>**

Bitte Kapitel 9. Felder MMThPh, speziell Vektorfelder, wiederholen.

Wir betrachten zwei MP mit den Massen m und M und legen den Ursprung des KS in M.

<u>Gravitationskraft:</u> $\underline{\underline{F}_G(\underline{r}) = -\gamma \frac{mM}{r^2} \frac{\underline{r}}{r}}$



Betrag $\quad F_G(r) = \gamma \frac{mM}{r^2} \quad \rightarrow$ kugelsymmetrisch

Das Kraftfeld $\underline{F}_G$ ist wirbelfrei, da

$$\text{rot } \underline{F}_G(\underline{r}) = 0 \qquad \left(\text{prüfen! z.B. } \frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}, \; i,j = 1,2,3\right).$$

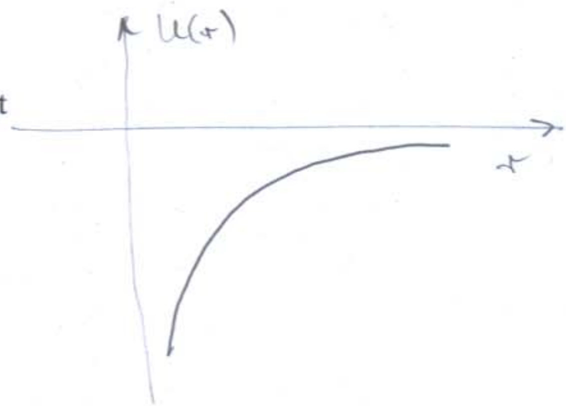
und besitzt somit ein Potenzial U(r) $\rightarrow$ die potenzielle Energie von m in $\underline{F}_G(\underline{r})$.

U(r) kann als Wegintegral entlang eines beliebigen Weges von einem Bezugspunkt $\underline{r}_0$ zum Beobachtungspunkt $\underline{r}$ berechnet werden (MMThPh Kap. 11.2, Kurvenintegrale)

$$U(r) - U(r_0) = -\int_C d\underline{r} \cdot \underline{F}_G(\underline{r}) \underbrace{=}_{\substack{\text{parametrisiere C durch} \\ \text{Radialstrahl } \underline{r}(\lambda) = \lambda \, \underline{e}_r}} + \gamma m M \int_{r_0}^{r} \frac{d\lambda}{\lambda^2} \, \underline{e}_r \cdot \underline{e}_r = \frac{1}{r}\bigg|_{r_0}^{r} = -\gamma m M \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right).$$

Wird der Bezugspunkt $\underline{r}_0$ ins Unendliche gelegt, folgt

$$\underline{U(r) = -\gamma \frac{mM}{r}}.$$



"Kepler-Potenzial" $\rightarrow$ potenzielle Energie der Probemasse m im G-Feld von M

Wir vereinbaren die folgende Terminologie:

Gravitationskraft $$\underline{F}_G(\underline{r}) = -\gamma \frac{mM}{r^2}\frac{\underline{r}}{r} = m\,\underline{g}(\underline{r})$$

mit der Feldstärke (oder kurz dem G-Feld) $$\underline{g}(\underline{r}) = -\frac{\gamma M}{r^2}\frac{\underline{r}}{r}.$$

Die Feldstärke $g(\underline{r})$ ist besser als die Gravitationskraft $\underline{F}_G(\underline{r})$ oder die potenzielle Energie $U(r)$ zur Beschreibung des von M im Punkt $\underline{r}$ erzeugten G-Feldes geeignet, da sie unabhängig von der Masse des Probekörpers m ist. Für die zum Kraftfeld $\underline{F}_G(\underline{r})$ gehörende potenzielle Energie des Probeteilchens gilt

$$U(r) = -\gamma \frac{mM}{r} = m\phi(r)$$

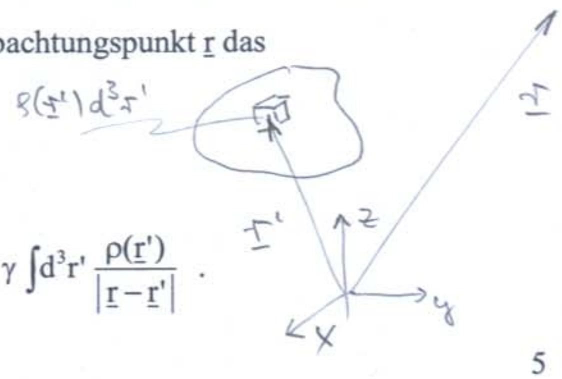
mit dem skalaren Potenzial $$\underline{\phi(r) = -\frac{\gamma M}{r}} \quad \underline{\rightarrow \textbf{Gravitationspotenzial.}}$$

Wie zu fordern ist $$\underline{g}(\underline{r}) = -\underline{\nabla}\phi(r) = -\frac{d\phi}{dr}\underline{e}_r = -\frac{\gamma mM}{r^2}\frac{\underline{r}}{r}.$$

Das von N Punktmassen m_i bei $\underline{r}_i$ am Ort $\underline{r}$ erzeugte Gravitationspotenzial lässt sich in der Form (Superposition)

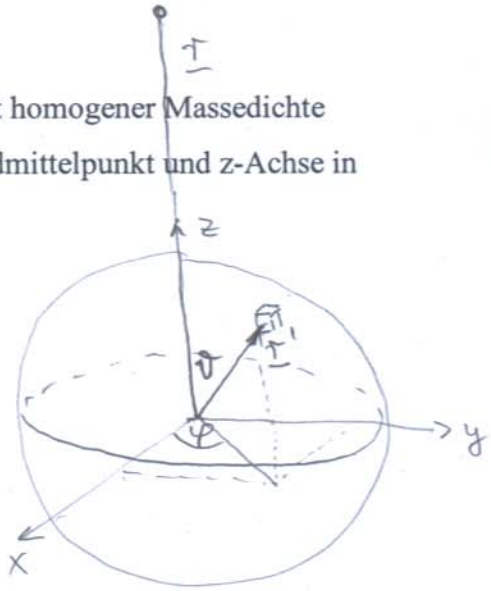
$$\phi(\underline{r}) = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\gamma m_i}{|\underline{r} - \underline{r}_i|}$$

darstellen. Entsprechend erhalten wir im Fall einer kontinuierlichen lokalisierten Masseverteilung mit der Massendichte $\rho(\underline{r}')$ im Beobachtungspunkt $\underline{r}$ das Gravitationspotenzial



$$\phi(\underline{r}) = -\sum_{i=1}^{N} \gamma \frac{\overbrace{\rho(\underline{r}_i)\Delta V_i}^{m_i}}{|\underline{r} - \underline{r}_i|} \xrightarrow[\Delta V_i \to 0]{\text{im Grenzfall}} \phi(\underline{r}) = -\gamma \int d^3r' \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \quad .$$

■ Gravitationsfeld der Erde



Wir betrachten die Erde näherungsweise als Kugel (Radius R) mit homogener Massedichte und wählen sphärische Koordinaten (r', ϑ, φ) mit Ursprung im Erdmittelpunkt und z-Achse in Richtung des Beobachtungspunktes r

$$\phi(\underline{r}) = -\gamma \int d^3r' \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = -\gamma \frac{M}{\frac{4\pi}{3}R^3} \int \frac{d^3r'}{|\underline{r}-\underline{r}'|} =$$

$$= -\gamma \frac{M}{\frac{4\pi}{3}R^3} \int_0^R dr' r'^2 \int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} \frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\vartheta}} \overset{\nabla}{=}$$

Einschub: $\frac{d}{d\vartheta}\left(\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\vartheta}\right) = \frac{1}{2}\frac{(-2)rr'(-\sin\vartheta)}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\vartheta}} = \frac{rr'\sin\vartheta}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\vartheta}}$

$$\overset{\nabla}{=} -\frac{3\gamma M}{4\pi R^3} 2\pi \int_0^R dr' r'^2 \left. \frac{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\vartheta}}{rr'} \right|_0^\pi = -\frac{3\gamma M}{2R^3} \int_0^R dr' \frac{r'}{r}\left(\sqrt{r^2+r'^2+2rr'} - \sqrt{r^2+r'^2-2rr'}\right) =$$

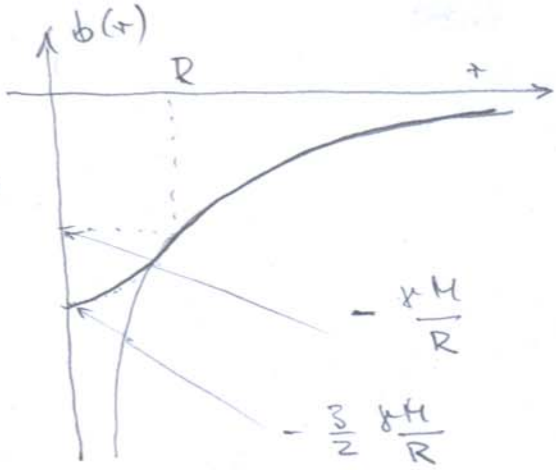
$$= -\frac{3\gamma M}{2R^3} \int_0^R dr' \frac{r'}{r}\left[(r+r') - |r-r'|\right]$$

Für Beobachtungspunkte außerhalb der Erde/Kugel, d.h. für r > R, ergibt sich wegen r > r'

$$\phi(\underline{r}) = -\frac{3\gamma M}{2R^3}\frac{1}{r}\int_0^R dr'\, r' \underbrace{[(r+r')-(r-r')]}_{2r'} = -\frac{3\gamma M}{2R^3}\frac{1}{r}\int_0^R dr'\, 2r'^2 = -\frac{3\gamma M}{2R^3}\frac{1}{r}\frac{2R^3}{3} = -\frac{\gamma M}{r} = \phi(r)$$

→ Außerhalb der Kugel ist das Gravitationsfeld gleich dem einer Punktmasse M im Mittelpunkt der Erde. Aus diesem Grund ist es möglich, für r > R die Erde als Punktmasse zu behandeln (Abweichungen infolge Erdabplattung, inhomogener Dichteverteilung, etc. vernachlässigt). Feynman, S. 202: Das G-Feld der Erde wirkt auf einen Massepunkt außerhalb der Erde so, als wäre die Erdmasse im Erdmittelpunkt vereinigt.

Im Inneren der Erde/Kugel folgt analog



$$\phi(\underline{r}) = -\frac{3\gamma M}{2R^3}\frac{1}{r}\left(\int_0^r dr'\, 2r'^2 + \int_r^R dr' r' \underbrace{[(r+r')+(r-r')]}_{2r}\right) =$$

$$-\frac{3\gamma M}{2R^3}\frac{1}{r}\left(\frac{2r^3}{3} + 2r\frac{r'^2}{2}\Big|_r^R\right) =$$

$$= -\frac{3\gamma M}{2R^3}\frac{1}{r}\left(rR^2 - \frac{r^3}{3}\right) = -\gamma M\left(\frac{3}{2R} - \frac{r^2}{2R^3}\right) = \phi(r)$$

Gravitationspotenzial einer Kugel mit hom. Massedichte $\rho(r) = \rho_0 = 3M/4\pi R^3$

Für die Feldstärke des G-Feldes erhalten wir

$$\underline{g}(\underline{r}) = -\underline{\nabla}\,\phi(r) = -\frac{d\phi(r)}{dr}\underline{e}_r = \begin{cases} -\dfrac{\gamma M}{r^2}\dfrac{\underline{r}}{r}, & \text{für } r > R \\[2ex] -\dfrac{\gamma M}{R^3} r\,\dfrac{\underline{r}}{r}, & \text{für } r < R \end{cases} \qquad \text{(Radialfeld!)}$$

Auf dem dritten Übungsblatt ist die gleiche Aufgabe mit Hilfe des Gauß´schen Satzes

$\oint_{\partial V} \underline{df}\cdot\underline{g}(\underline{r}) = \int_V d^3r\, \mathrm{div}\,\underline{g}(\underline{r})$ zu lösen. Man findet durch Berechnung des Flusses von $g(\underline{r})$ durch die Kugeloberfläche leicht $\int_V d^3r\, \mathrm{div}\,\underline{g}(\underline{r}) = -4\pi\gamma M$. Daraus folgt im vorliegenden Fall offensichtlich (dies ist natürlich kein allgemeiner Beweis!)

$$\underline{\overbrace{\mathrm{div}\,\underline{g}(\underline{r})}^{\text{lok. Quellstärke des G-Feldes}} = -4\pi\gamma \overbrace{\rho(\underline{r})}^{\text{Massen-dichte}}} \qquad \rightarrow \text{ die } \underline{\text{Massen sind die Quellen des G-Feldes}}.$$

Die zweite Feldgleichung (G-Feld ist konservativ)

$\underline{\mathrm{rot}\,\underline{g}(\underline{r}) = 0}$ impliziert $\underline{\underline{g}(\underline{r}) = -\mathrm{grad}\,\phi(\underline{r})}$.

Mit lokaler Quellstärke und lokaler Wirbelstärke ist das G-Feld eindeutig bestimmt.

Insgesamt ergibt sich für das Gravitationspotenzial

$$-4\pi\gamma\,\rho(\underline{r}) = \operatorname{div}\underline{g}(\underline{r}) = \operatorname{div}\left(-\operatorname{grad}\phi(\underline{r})\right) = -\underline{\nabla}\cdot\underline{\nabla}\phi(\underline{r}) = -\Delta\phi(\underline{r})\,,\ \text{also}$$

$$\underline{\Delta\phi(\underline{r}) = 4\pi\gamma\,\rho(\underline{r})} \quad \rightarrow$$ **Poisson-Gleichung**