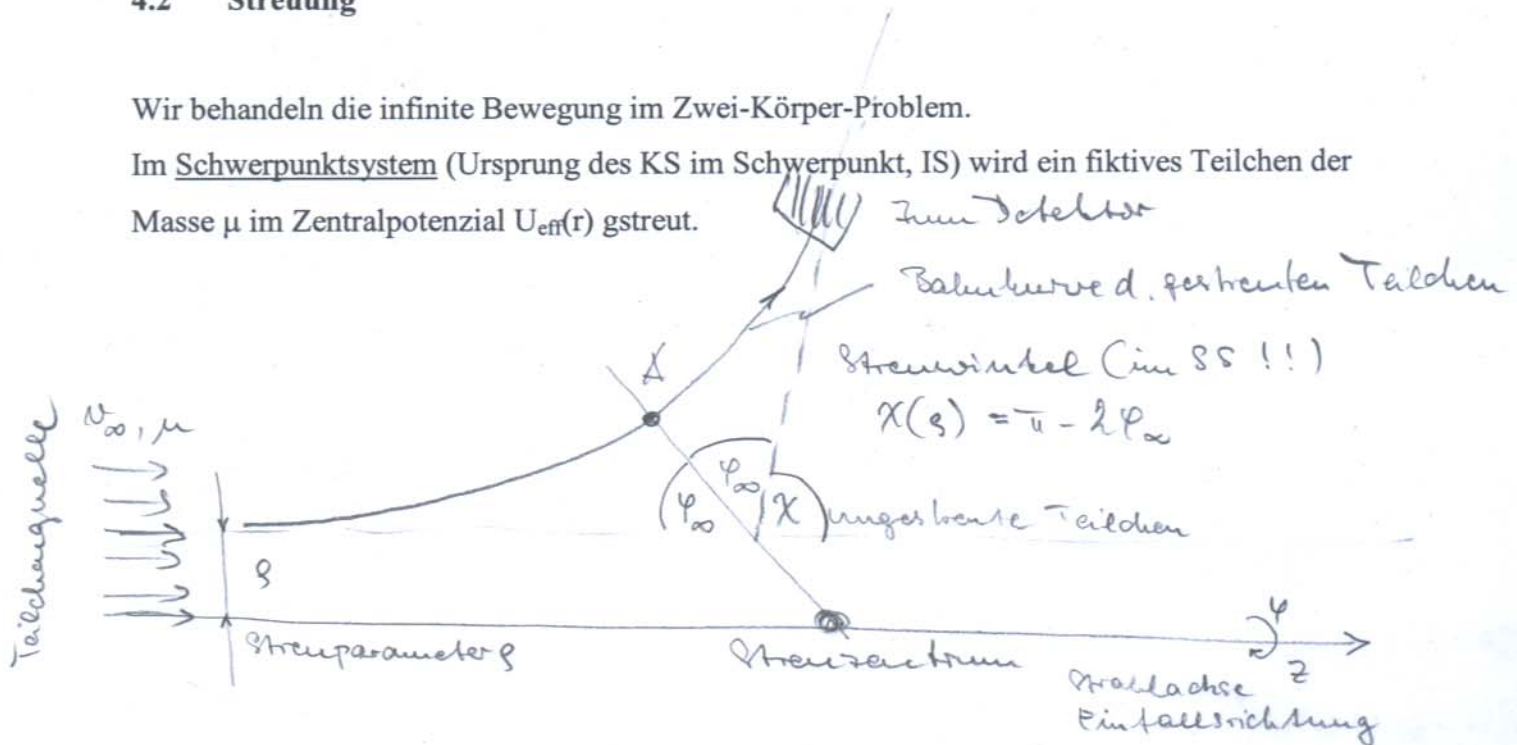


## 4.2 Streuung

Wir behandeln die infinite Bewegung im Zwei-Körper-Problem.

Im Schwerpunktsystem (Ursprung des KS im Schwerpunkt, IS) wird ein fiktives Teilchen der Masse  $\mu$  im Zentralpotenzial  $U_{\text{eff}}(r)$  gestreut.



Symmetrie: Wir orientieren die z-Achse in Richtung der einfallenden Teilchen. Das bricht die Zentralsymmetrie des Potenzial; lediglich die Rotationssymmetrie um die z-Achse (also bzgl.  $\varphi$ ) bleibt erhalten.

Die Bahnkurve besteht aus zwei Hyperbelästen, die symmetrisch zur Richtung  $r = r_{\min}$

verlaufen, wobei  $U(r_{\min}) + \frac{L_z^2}{2\mu r_{\min}^2} = E$ .

Bei  $r = r_{\min}$  wechselt  $\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U_{\text{eff}})}$  und damit der Integrand in  $\varphi(r)$  sein Vorzeichen ( $E - U_{\text{eff}} = 0$ ). Bis zum Abstand A (vgl. Skizze) nimmt der Abstand zum Streuzentrum ab ( $\dot{r} < 0$ ), danach nimmt er zu ( $\dot{r} > 0$ ). Beide Äste unterscheiden sich lediglich im Vorzeichen von  $\varphi$ ; zu jedem  $+\varphi(r)$  gibt es ein  $-\varphi(r)$ .

Bei Wahl von  $\varphi_0$  gemäß  $\varphi(r_{\min}) = 0$  folgt

$$\pm \varphi(r) = L_z \int_{r_{\min}}^r \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{2\mu[E - U_{\text{eff}}(r')]} = L_z \int_{r_{\min}}^r \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{2\mu[E - U(r')] - \frac{L_z^2}{r'^2}}}$$

Der  $\rightarrow$  **Streuwinkel**  $\chi(\rho)$  bestimmt die Streurichtung vollständig (keine  $\varphi$ -Abhängigkeit).

Wir setzen voraus, dass (i) jedes Teilchen maximal an einem Teilchen des Targets gestreut wird und (ii) die einfallenden Teilchen sich nicht untereinander beeinflussen.

Unter Berücksichtigung von  $E = \frac{\mu}{2} v_\infty^2$  und  $L_z = \rho \mu v_\infty$

(Betrachte " $r \rightarrow -\infty$ ":  $\text{const} = \underline{L} = \lim_{r \rightarrow \infty} \mu \underline{r} \times \dot{\underline{r}} = \lim_{r \rightarrow \infty} \mu (z \underline{e}_z + \rho \underline{e}_\perp) \times (-v_\infty \underline{e}_z) = -\mu \rho v_\infty \underline{e}_\perp \times \underline{e}_z$ )

folgt 
$$\varphi_\infty = L_z \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{2\mu \left[ E - U(r) - \frac{L_z^2}{2\mu r^2} \right]}} = \int_{r_{\min}}^{\infty} dr \frac{\rho \mu v_\infty}{r^2 \sqrt{\mu^2 v_\infty^2 - 2\mu U(r) - \frac{\rho^2 \mu^2 v_\infty^2}{r^2}}} \text{ also}$$

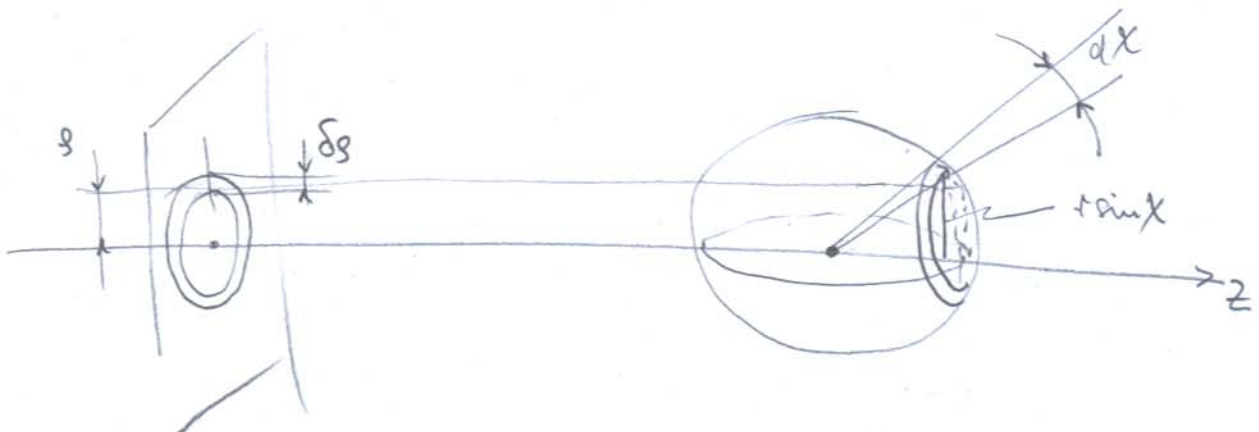
---


$$\varphi_\infty = \rho \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{U(r)}{\frac{\mu}{2} v_\infty^2} - \frac{\rho^2}{r^2}}} \quad (\text{H6})$$


---

• **Streuquerschnitt**

Der einfallende Teilchenstrahl ( $\mu, v_\infty$ ) sei homogen, die Dichte der einfallenden Teilchen sei  $n$ .



Ringfläche  $2\pi\rho d\rho$

$dN = 2\pi\rho d\rho n \rightarrow$  Anzahl der durch den Ring einfallenden Teilchen

Teilchen in  $(\rho, \rho+d\rho)$  werden unter  $(\chi, \chi+d\chi)$  gestreut. Beachte:  $\rho(\chi)$  monoton fallend,  $\frac{d\rho}{d\chi} < 0$

(Skizze)

$d\sigma := \frac{dN}{n}$  gibt die Anzahl der Teilchen an, die pro Zeiteinheit und pro Flächeneinheit gemessen werden ( $[d\sigma] = \text{m}^2$ , gebräuchliche Einheit:  $1 \text{ barn} = 100 (\text{fm})^2 = 10^{-28} \text{ m}^2$ ).

$$d\sigma := \frac{dN}{n} = 2\pi \rho d\rho = 2\pi \rho(\chi) \left| \frac{d\rho}{d\chi} \right| d\chi = \rho(\chi) \left| \frac{d\rho}{d\chi} \right| \frac{1}{\sin\chi} d\Omega$$

Wir führen den Raumwinkel

$$d\Omega := \frac{dA}{r^2} = 2\pi \underbrace{r \sin\chi}_{\text{Radius der Ringzone}} \underbrace{r d\chi}_{\text{Breite der Ringzone}} \frac{1}{r^2} = 2\pi \sin\chi d\chi$$

ein. Bezogen auf das Raumwinkelelement zwischen zwei Kegeln mit den Scheitelwinkeln  $\chi, \chi + d\chi$  bezogen, d.h. unter Verwendung von  $d\Omega = 2\pi \sin\chi d\chi$  folgt der  $\rightarrow$  differentielle Streuquerschnitt

$$d\sigma(\Omega) = \rho(\chi) \left| \frac{d\rho}{d\chi} \right| \frac{1}{\sin\chi} d\Omega, \quad \frac{d\sigma(\Omega)}{d\Omega} - \text{differentieller Streuquerschnitt}$$

Er gibt den Anteil (in%) der einfallenden Teilchen an, die in  $d\Omega$  gestreut werden.

Der  $\rightarrow$  integrale oder  $\rightarrow$  totale Streuquerschnitt ergibt sich zu

$$\sigma = \int \Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} = \int d\Omega \rho(\chi) \left| \frac{d\rho}{d\chi} \right| \frac{1}{\sin\chi}.$$

■ Streuung im Coulomb-Potenzial. Rutherford'sche Streuformel

Ziel: Streuquerschnitt für  $U(r) = \frac{\alpha}{r}$

$$\begin{aligned} \varphi_{\infty} &= \rho \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{2U(r)}{\mu v_{\infty}^2} - \frac{\rho^2}{r^2}}} = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\frac{\rho}{r^2} dr}{\sqrt{1 - \frac{2\alpha}{\mu \rho v_{\infty}^2} \frac{\rho}{r} - \frac{\rho^2}{r^2}}} \stackrel{\substack{u := \frac{\rho}{r} \\ du = -\frac{\rho}{r^2} dr}}{=} \int_0^{u_{\max}} \frac{du}{\sqrt{1 - 2Au - u^2}} = \\ &= \int_0^{u_{\max}} \frac{du}{\sqrt{1 + A^2 - (u + A)^2}}, \text{ mit } A := \frac{\alpha}{\mu \rho v_{\infty}^2}. \end{aligned}$$

Die obere Integrationsgrenze  $u_{\max} := \frac{\rho}{r_{\min}}$  ergibt sich aus  $1 - 2Au_{\max} - u_{\max}^2 = 0$ , also

$$u_{\max} = -A + \sqrt{A^2 + 1} \quad (\text{das negative Vorzeichen vor der Wurzel widerspräche der Forderung } u_{\max} > 0).$$

Über die Substitution  $z = u + A$  folgt

$$\varphi_{\infty} = \int_A^{u_{\max}+A} \frac{dz}{\sqrt{1 + A^2 - z^2}} = \arcsin\left(\frac{z}{\sqrt{1 + A^2}}\right) \Big|_A^{\sqrt{1 + A^2}} = \arcsin 1 - \arcsin\left(\frac{A}{\sqrt{1 + A^2}}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctg A,$$

denn mit  $\arcsin\left(\frac{A}{\sqrt{1 + A^2}}\right) =: t$  ist  $\sin t = \frac{A}{\sqrt{1 + A^2}}$ , also

$$\tg^2 t = \frac{\sin^2 t}{1 - \sin^2 t} = \frac{A^2}{1 + A^2} \frac{1}{1 - \frac{A^2}{1 + A^2}} = A^2 \text{ und damit } t = \arctg A.$$

Der Streuwinkel ist  $\chi = \pi - 2\varphi_{\infty} = \pi - 2\left(\frac{\pi}{2} - \arctg A\right) = 2\arctg A.$

Damit gilt  $A = \tg \frac{\chi}{2} = \frac{\alpha}{\mu \rho v_{\infty}^2}$  und folglich

$$\rho(\chi) = \frac{\alpha}{\mu v_{\infty}^2 \tg \frac{\chi}{2}}.$$

Somit finden wir für den differentiellen Streuquerschnitt

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma(\Omega)}{d\Omega} &= \rho(\chi) \left| \frac{d\rho}{d\chi} \right| \frac{1}{\sin\chi} = \\ &= \frac{\alpha}{\mu v_\infty^2 \operatorname{tg} \frac{\chi}{2}} \left| \frac{\alpha}{\mu v_\infty^2} \cdot \frac{(-1)}{\operatorname{tg}^2 \frac{\chi}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{\chi}{2}} \cdot \frac{1}{2} \right| \frac{1}{\underbrace{2 \sin \frac{\chi}{2} \cos \frac{\chi}{2}}_{\sin\left(\frac{\chi}{2} + \frac{\chi}{2}\right)}} = \left( \frac{\alpha}{2\mu v_\infty^2} \right)^2 \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\chi}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{\chi}{2} \cos^2 \frac{\chi}{2} \sin \frac{\chi}{2} \cos \frac{\chi}{2}}, \end{aligned}$$

also

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \rho(\chi) \left| \frac{d\rho}{d\chi} \right| \frac{1}{\sin\chi} = \left( \frac{\alpha}{2\mu v_\infty^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\chi}{2}} \rightarrow \text{Rutherford (1913) (im SS!)} \hrule$$

Der Streuquerschnitt ist invariant gegen die Transformation  $\alpha \rightarrow -\alpha$ : Anziehendes und abstoßendes Coulomb-Potenzial streuen gleich.

Historisch wichtiges Beispiel: Streuung von  $\alpha$ -Teilchen an einer dünnen Goldfolie, Rutherford'sches Atommodell (1913)

$\text{He}^{2+}$ :  $Z_1 = 2$ , Au:  $Z_2 = 79$ ,  $\mu \sim m_{\text{He}^{2+}}$

Die  $\alpha$ -Teilchen stammten aus natürlicher Radioaktivität mit Energien  $E$  zwischen 4 und 8

MeV. Die Abhängigkeit  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  wurde experimentell bestätigt. Bei "zentralem Stoß" mit

$$\rho = 0 (\rightarrow L = 0) \text{ folgt } r_{\min} \cong \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 E} \underset{E=6\text{MeV}}{\cong} 10^{-13} \text{ m.}$$

Das ist viel kleiner als der (damals bekannte) Atomradius (einige Angström). Trotzdem ist der überwiegende Teil der Atommasse konzentriert!

Atom:	positiv geladener Kern + Elektronenhülle
↑	↑
$\varnothing \sim 10^{-10} \text{ m}$	$\varnothing \sim 10^{-14} \text{ m}$
also einige Angström	also einige Fermi ( $1 \text{ f} = 10^{-15} \text{ m} = 1 \text{ fm}$ )

→ Der von den Atomen eingenommene Raum ist nahezu leer.

Weitere Anwendungen:

- Streuung hochenergetischer Neutronen und Protonen zur Aufklärung der Struktur des Atomkerns
- Neutronenstreuung an Festkörpern und Flüssigkeiten

## 5. Formulierung der klassischen Mechanik nach Hamilton und Jacobi

Kanonische Mechanik → Krone der klassischen Punktmechanik

### 5.1 Hamilton'sche Bewegungsgleichungen

Wir führen die Hamilton-Funktion eines mechanischen Systems über die Legendre-Transformation ein

$$H = \sum_{i=1}^f \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = \sum_{i=1}^f \dot{q}_i p_i - L, \quad p_i := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad L = L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t), \quad H = H(\underline{p}, \underline{q}, t) .$$

Während  $L$  eine Funktion der verallgemeinerten Koordinaten  $\underline{q} = (q_1, q_2, \dots, q_f)$ , der verallgemeinerten Geschwindigkeiten  $\underline{\dot{q}}$  und der Zeit ist, hängt  $H(\underline{p}, \underline{q}, t)$  von  $\underline{q}$ , den verallgemeinerten (kanonisch konjugierten) Impulsen  $\underline{p}$  und u.U. der Zeit ab. Faktisch werden die verallgemeinerten Geschwindigkeiten "ohne Informationen zu verlieren (s.u.)" durch die verallgemeinerten Impulse ersetzt. Für die partiellen Ableitungen von  $H$  nach  $q_k$ ,  $p_k$  und  $t$  finden wir sofort

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^f \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} p_i - \frac{\partial L}{\partial q_k} - \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} = - \frac{\partial L}{\partial q_k} = - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = - \frac{d}{dt} p_k = -\dot{p}_k$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = \sum_{i=1}^f \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_k} p_i + \dot{q}_k - \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_k} = \dot{q}_k$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^f \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \right) = - \frac{\partial L}{\partial t}$$

**Fazit:**  $\dot{p}_k = - \frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \rightarrow$  **Hamilton'sche (kanonische) Bewegungsgleichungen**

Das sind  $2f$  ODE 1. Ordnung, die  $f$  Lagrange-Gleichungen II. Art zur Bestimmung der Bahnkurve ersetzen. Die Bahnkurve kann geometrisch im Phasenraum veranschaulicht werden.

$q_k$  und  $p_k := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$  werden zueinander kanonisch-konjugiert Variable genannt.

Beachte: Die zu  $L = L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t)$  "gleichwertige" (s.u.) Funktion von  $\underline{q}$ ,  $\underline{p}$  und  $t$  ist nicht

$L = L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}(\underline{p}, \underline{q}, t), t)$ , sondern  $H(\underline{p}, \underline{q}, t) = \sum_{i=1}^f \dot{q}_i p_i - L$ . Dabei gewinnt man  $\dot{q}_i = \dot{q}_i(\underline{p}, \underline{q}, t)$

durch Invertierung von  $p_i(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) = \frac{\partial L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t)}{\partial \dot{q}_i}$ .

Man kann zeigen (Übung), dass die Legendre-Transformierte von  $H(\underline{p}, \underline{q}, t)$  wieder  $L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t)$  ist.



## 5.2 "Rezept" zur Lösung von Bewegungsproblemen / Bestimmung der Bahnkurven im Hamilton-Formalismus. Beispiele.

1. Nach Wahl der  $q$  und  $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$  Lagrange-Funktion  $L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) = T(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) - U(\underline{q}, t)$  aufstellen.
  2. Verallgemeinerte Impulse gemäß  $p_i = \frac{\partial L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t)}{\partial \dot{q}_i} = p_i(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t)$  und durch Umkehrung  $\dot{q}_i = \dot{q}_i(\underline{p}, \underline{q}, t)$  bestimmen.
  3. Hamilton-Funktion  $H(\underline{p}, \underline{q}, t) = \sum_{i=1}^f \dot{q}_i p_i - L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t)$  ausrechnen, darauf achten, dass alle verallgemeinerten Geschwindigkeiten eliminierte sind. Hinweis: Im Fall skleronomer Zwangbedingungen und  $U = U(\underline{q}, t)$ , also  $\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} = 0$  für alle  $i=1, \dots, f$  ist  $H(\underline{p}, \underline{q}, t) = T(\underline{p}, \underline{q}) + U(\underline{q}, t)$ . Damit kann man starten, wenn man alle  $\underline{p}$  kennt.
  4. Kanonische Gleichungen  $\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$ ,  $\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$  aufstellen.
  5. Kanonische Gleichungen unter Verwendung der Anfangsbedingungen lösen und die Lösungen interpretieren.
- 1d Bewegung eines MP ( $m$ ) in  $U(x)$

■ Kepler-Problem (→ Übung)

$$1) \quad L(r, \dot{r}, \vartheta, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}) = \frac{\mu}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta) + \gamma \frac{\mu M}{r}$$

$$2) \quad p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \mu \dot{r}, \quad p_\vartheta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = \mu r^2 \dot{\vartheta}, \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \mu r^2 \dot{\varphi} \sin^2 \vartheta$$

$$\rightarrow \dot{r} = \frac{p_r}{\mu}, \quad \dot{\vartheta} = \frac{p_\vartheta}{\mu r^2}, \quad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{\mu r^2 \sin^2 \vartheta}$$

$$3) \quad H(p_r, p_\vartheta, p_\varphi, r, \vartheta) = \frac{1}{2\mu} \left( p_r^2 + \frac{p_\vartheta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \vartheta} \right) - \gamma \frac{\mu M}{r}$$

■ Elektron im elektromagnetischen Feld (→ Übungsblatt)

$$1) \quad L(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t) = \frac{m}{2} \dot{\underline{r}}^2 + e \dot{\underline{r}} \cdot \underline{A}(\underline{r}, t) - e \phi(\underline{r}, t) = \sum_{i=1}^3 \frac{m}{2} \dot{x}_i^2 + e \dot{x}_i A_i(\underline{r}, t) - e \phi(\underline{r}, t)$$

■ Skleronome Zwangbedingungen

Ist (wie bei skleronome Zwangbedingungen)  $T(\underline{q}, \dot{\underline{q}})$  eine homogene Funktion zweiten

Grades in  $\dot{\underline{q}}$  und  $U(\underline{q}, t)$  unabhängig von  $\dot{\underline{q}}$ , dann gilt  $\sum_{i=1}^3 \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = 2T$  (Euler'scher Satz,

vgl. Herleitung (2.17)) und es folgt

$$H(\underline{p}, \underline{r}, t) = \sum_{i=1}^3 \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = 2T - (T - U) = T(\underline{p}, \underline{r}) + U(\underline{r}, t)$$

→ also die Energie des Systems als Funktion der verallgemeinerten Koordinaten und Impulse.

### 5.3 Hamilton'sches Variationsprinzip / Prinzip der kleinsten Wirkung II

Im vorigen Kapitel haben wir die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen unter Verwendung der Lagrange-Gleichungen II. Art abgeleitet. Nun wollen wir zeigen, dass sie auch direkt aus dem Hamilton'schen Variationsprinzip folgen.

Bisher: 
$$S[\underline{q}(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t), \quad \underline{q}(t_1) = \underline{q}_1, \quad \underline{q}(t_2) = \underline{q}_2 \quad \text{fest} .$$

Die tatsächlich in der Natur realisierte Bewegung zeichnet sich unter allen möglichen Bewegungen zwischen  $\underline{q}_1$  und  $\underline{q}_2$  dadurch aus, dass für sie die Wirkung  $S$  extremal ist, dass also für diese Bahnkurve die Variation der Wirkung infolge Variation der Bahnkurve verschwindet. Diese ausgezeichnete Bahnkurve ist Lösung der Euler-Lagrange-Gleichungen zum Funktional  $S$ , die wir als Lagrange-Gleichungen II. Art bezeichnet haben

$$\delta S[\underline{q}(t)] = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t), \quad \delta \underline{q}(t_1) = \delta \underline{q}(t_2) = 0 \quad \leftrightarrow \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, f .$$

Jetzt fassen wir  $S$  als Funktional von  $2f$  Funktionen  $p_i(t)$  und  $q_i(t)$  auf. Für festgehaltene Randwerte  $\delta \underline{q}(t_1) = \delta \underline{q}(t_2) = 0$ ,  $\delta \underline{p}(t_1) = \delta \underline{p}(t_2) = 0$  ist die Variation von  $S$

$$\delta S[\underline{p}(t), \underline{q}(t)] = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \sum_{i=1}^f \dot{q}_i p_i - H(\underline{p}, \underline{q}, t) \right] = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^f \left( \delta \dot{q}_i p_i + \dot{q}_i \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i \right) \stackrel{\circ\circ}{=}$$

Der erste Term auf der rechten Seite wird unter Verwendung von  $\delta \underline{q}(t_1) = \delta \underline{q}(t_2) = 0$  partiell

integriert  $\int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^f \delta \dot{q}_i p_i = \underbrace{\sum_{i=1}^f \delta q_i p_i \Big|_{t_1}^{t_2}}_0 - \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^f \delta q_i \dot{p}_i$  und es folgt

$$\stackrel{\circ\circ}{=} \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^f \left[ \left( \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i - \left( \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i \right] \stackrel{!}{=} 0 .$$

Da die Variationen  $\delta p_i$  und  $\delta q_i$  unabhängig und beliebig sind, ist diese Relation nur erfüllt, wenn gilt

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} .$$

Fazit: Wie im Lagrange-Formalismus sind die Bewegungsgleichungen äquivalent zum Hamilton'schen Variationsprinzip.