Prof. Dr. Andreas Knorr
Dr. Carsten Weber
Dipl. Phys. Alexander Carmele
Dipl. Phys. Ken Lichtner

2. Übungsblatt – Theoretische Physik V: Quantenmechanik II

Abgabe: Fr. 05.11.2010 12:00 Uhr im Briefkasten am Ausgang des ER-Gebäudes

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 5 (7 Punkte): *Lagrange-Dichte*

(a) Leiten Sie aus dem Hamiltonschen Variationsprinzip

$$\delta \int \mathcal{L}(\psi_i, \partial_\mu \psi_i) \mathrm{d}^4 x = 0$$

die Bewegungsgleichungen für die Felder ψ_i her (Euler-Lagrange-Gleichungen).

(b) Gegeben sei die folgende Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}(\psi, \psi^*, \partial_\mu \psi, \partial_\nu \psi^*) = -\frac{\hbar^2}{2m}(\nabla\psi^*) \cdot (\nabla\psi) - \frac{\hbar}{2i}\left(\psi^* \partial_t \psi - (\partial_t \psi^*)\psi\right) - \psi^* V \psi.$$

Bestimmen Sie die zugehörigen Bewegungsgleichungen. Um welches Feld handelt es sich?

Aufgabe 6 (6 Punkte): *Dirac-Koeffizienten*

In der Vorlesung haben Sie u.a. durch den Vergleich mit der Klein-Gordon-Gleichung Bedingungen hergeleitet, die die Dirac-Koeffizienten α^k, β erfüllen müssen.
Verifizieren Sie, dass die folgenden Koeffizienten diese Bedingungen erfüllen ($k = 1, 2, 3$):

$$\alpha^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix},$$

mit

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Folgende Eigenschaften sind zu zeigen:

(a) α^k, β sind hermitesche Matrizen.

(b) $\alpha^l \alpha^k + \alpha^k \alpha^l = 2\delta_{kl} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}$.

(c) $\alpha^k \beta + \beta \alpha^k = 0$.

(d) $(\alpha^k)^2 = \beta^2 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}$.

(f) $\mathrm{Sp}[\alpha^k] = 0$.

Bitte Rückseite beachten!⟶

Aufgabe 7 (7 Punkte): *Helizitätsoperator*
Der Helizitätsoperator

$$\Lambda = \mathbf{S} \cdot \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}$$

ist über den Spinoperator $\mathbf{S}^T = (S_1, S_2, S_3)$ definiert, dessen Komponenten die Pauli-Matrizen wie folgt bilden:

$$S_i = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix}.$$

Der freie Dirac-Hamilton-Operator

$$H = c \begin{pmatrix} 0 & \sigma \cdot \mathbf{p} \\ \sigma \cdot \mathbf{p} & 0 \end{pmatrix} + m_0 c^2 \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix},$$

über den Vektor $\sigma^T = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ ausgedrückt, vertauscht mit dem Helizitätsoperator. Zeigen Sie dies durch eine Rechnung explizit. Was bedeutet dies bezüglich der Eigenvektoren der Operatoren?