Prof. Dr. Tobias Brandes
Dipl.-Phys. Arash Azhand, Dipl.-Phys. Valentin Flunkert, Dipl.-Phys. Philipp Zedler
Benjamin Regler, Jan Techter

4. Übungsblatt zur Theoretischen Physik III: Elektrodynamik

Abgabe: Montag 22.11. bis 10:00 in den Briefkasten im Ernst-Ruska Gebäude (Physik Altbau). Die Abgabe erfolgt in **2er** oder **3er Gruppen**.

Aufgabe 10 (7 Punkte): *Biot-Savart'sches Gesetz, Helmholtz-Spule*

a) Berechnen Sie mit Hilfe des BIOT-SAVART'SCHEN Gesetzes das Magnetfeld eines dünnen kreisförmigen Drahtrings vom Radius R, der von einem stationären Strom I durchflossen wird. Gehen Sie folgendermaßen vor:

– Leiten Sie in Zylinderkoordinaten einen Integralausdruck für die Horizontal- und die Vertikalkomponente des Magnetfeldes ab.

– Rechnen Sie das Integral auf der Symmetrieachse exakt aus.

b) Betrachten Sie nun zwei gleiche Drahtringe, die parallel zueinander im Abstand d angebracht sind. Wie groß muss der Abstand d gewählt werden, damit das Magnetfeld auf der Symmetrieachse des Systems zwischen den Ringen möglichst homogen ist?
Hinweis: Es ist sinnvoll die magnetische Induktion längs der Symmetrieachse um den Mittelpunkt der Anordnung in eine Taylorreihe zu entwickeln.

Aufgabe 11 (7 Punkte): *Mikroskopische Dipolmomente*
In der VL wurde gezeigt, dass die elektrischen und magnetischen Dipolpotentiale

$$\Phi_{\mathrm{dipol}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{d}\cdot\mathbf{r}}{r^3}, \qquad \mathbf{A}_{\mathrm{dipol}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\boldsymbol{\mu}\times\mathbf{r}}{r^3}, \qquad (r = |\mathbf{r}| \neq 0)$$

jeweils durch die am Ursprung lokalisierten Ladungs- und Stromdichten

$$\rho_{\mathbf{d}}(\mathbf{r}) = -\mathbf{d}\cdot\nabla\delta^{(3)}(\mathbf{r}), \qquad \mathbf{j}_{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{r}) = -\boldsymbol{\mu}\times\nabla\delta^{(3)}(\mathbf{r})$$

erzeugt werden.

a) Zeigen Sie, dass $\rho_{\mathbf{d}}(\mathbf{r})$ der Grenzwert einer Ladungsdichte ist, die einen Dipol $\mathbf{d} = q\mathbf{a}$ aus zwei Punktladungen $\pm q$ an den Orten $\pm\frac{\mathbf{a}}{2}$ für $|a| \to 0$, $q \to \infty$ (mit $\mathbf{d}$ konstant) beschreibt.

b) Zeigen Sie, dass $\mathbf{j}_{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{r})$ der Grenzwert einer Stromdichte auf einer ringförmigen Kurve C mit Strom I und Radius R senkrecht zu μ ist.

– Beweisen Sie zunächst die Darstellung

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{I}{2}\int_C \mathbf{r}\times d\mathbf{r}$$

für das magnetisches Dipolmoment eines Stromfadens.

– Benutzen Sie weiterhin die Darstellung

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = I\int_C d\mathbf{r}'\,\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$

um $\lim_{R\to 0}\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}_{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{r})$ zu zeigen. Parametrisieren Sie hierzu den Ring C mit Polarkoordinaten in der Ebene senkrecht zu $\boldsymbol{\mu}$ mit den Basisvektoren $\mathbf{e}_r$ und $\mathbf{e}_\phi$.

Aufgabe 12 (6 Punkte): *Magnetisches Moment einer rotierenden Kugel*

Betrachten Sie eine homogen geladene Vollkugel mit Radius R und Ladung Q, die um die z-Achse mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotiert.

a) Geben Sie die Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ innerhalb der Kugel an und verwenden Sie den Ausdruck

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2} \int_V d^3r \; \mathbf{r} \times \mathbf{j}(\mathbf{r})$$

um zu zeigen, dass das magnetische Moment der Kugel gegeben ist durch $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\omega} \frac{R^2 Q}{5}$.

b) Drücken Sie das magnetische Moment durch den Drehimpuls $\mathbf{L}$ der Kugel aus. In der Quantenmechanik nimmt der Drehimpuls diskrete Werte an $L = \hbar l$ wobei l eine dimensionslose Zahl ist. Es gilt dann

$$\mu = \mu_0 \, g \, l,$$

wobei $\mu_0 = Q\hbar/2m$ das Magneton des Teilchens und g der gyromagnetische Faktor ist. Bestimmen Sie den gyromagnetischen Faktor der Kugel.