Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik 7. Dezember 2010
http://www.itp.tu-berlin.de Direktzugang: 90109

Prof. Dr. Tobias Brandes
Dipl.-Phys. Arash Azhand, Dipl.-Phys. Valentin Flunkert, Dipl.-Phys. Philipp Zedler
Benjamin Regler, Jan Techter

7. Übungsblatt zur Theoretischen Physik III: Elektrodynamik

Abgabe: Montag 13.12. bis 10:00 in den Briefkasten im Ernst-Ruska Gebäude (Physik Altbau). Die Abgabe erfolgt in **3er Gruppen**.

Aufgabe 19 (7 Punkte): *Liénard-Wiechert-Potentiale*
In der Vorlesung wurden die Liénard-Wiechert-Potentiale hergeleitet:

$$\Phi(\mathbf{r},\, t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{||\mathbf{R}| - \dot{\mathbf{r}}_0(t_0)\cdot \mathbf{R}/c|},$$
$$\mathbf{A}(\mathbf{r},\, t) = \frac{q\mu_0 \dot{\mathbf{r}}_0(t_0)}{4\pi} \cdot \frac{1}{||\mathbf{R}| - \dot{\mathbf{r}}_0(t_0)\cdot \mathbf{R}/c|},$$

wobei $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_0)$ ist und die Zeit t_0 implizit gegeben ist durch

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_0)|/c - (t - t_0) = 0.$$

Betrachten Sie den Fall einer Punktladung, die sich mit einer konstanten Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{v}$ bewegt. Das Koordinatensystem sei so gewählt, dass das Teilchen zur Zeit $t = 0$ im Ursprung ist. Berechnen Sie die Potentiale und das $\mathbf{E}$-Feld für diesen Fall. Vorgehensweise:

(i) Geben Sie $\mathbf{r}_0(t)$ an und berechnen Sie damit die Zeit t_0 aus der impliziten Gleichung. Dabei ist eine quadratische Gleichung zu lösen. Behalten Sie hier nur die Lösung, die die Kausalität erfüllt (Tipp: Setzen Sie zum Test $\mathbf{v} = 0$ ein).

(ii) Zeigen Sie, dass sich damit die Potentiale schreiben lassen als

$$\Phi(\mathbf{r},\, t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 w\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}\sin^2\Theta}}, \qquad \mathbf{A}(\mathbf{r},\, t) = \frac{q\mu_0\mathbf{v}}{4\pi w\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}\sin^2\Theta}},$$

wobei $\mathbf{w} = \mathbf{r} - \mathbf{v}t$ (zum nicht retardierten Zeitpunkt), $w = |\mathbf{w}|$ und Θ der Winkel zwischen $\mathbf{w}$ und $\mathbf{v}$ ist.

Bonus: Zeigen Sie, dass sich aus $\mathbf{E} = -\text{grad}\,\Phi - \partial_t \mathbf{A}$ das folgende $\mathbf{E}$-Feld ergibt:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},\, t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1 - v^2/c^2}{\left(1 - (v^2/c^2)\sin^2\Theta\right)^{3/2}} \cdot \frac{\mathbf{w}}{w^3},$$

Aufgabe 20 (7 Punkte): *Elliptische Polarisation*
In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die E_x und E_y Komponenten des elektrischen Feldes einer ebenen Welle die Ellipsen-Gleichung

$$\left(\frac{E_x}{E_1} + \frac{E_y}{E_2}\right)^2 \frac{1}{4\cos^2\delta} + \left(\frac{E_x}{E_1} - \frac{E_y}{E_2}\right)^2 \frac{1}{4\sin^2\delta} = 1$$

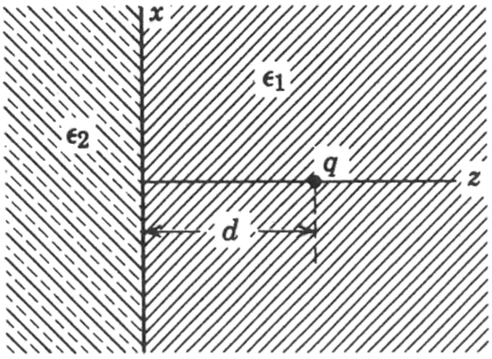
erfüllen. Verwenden Sie die Parametrisierung $E_1 = E\cos\theta$, $E_2 = E\sin\theta$ und bringen Sie die Gleichung auf die Form

$$(E_x\ E_y)\begin{pmatrix} A & C \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = 1,$$

d.h. bestimmen Sie die Koeffizienten der Matrix. Berechnen Sie nun die zwei Eigenwerte der Matrix. Diese entsprechen den Hauptachsen der Polarisationsellipse.

7. Übung TPIII WS2010/11

Aufgabe 21 (6 Punkte): *Punktladung im Dielektrikum*



Eine Punktladung q befinde sich am Ort $\mathbf{d} = (0, 0, d)$. Im Bereich $z > 0$ sei der Raum mit einem Dielektrikum ϵ_1 gefüllt und im Bereich $z < 0$ mit einem Dielektrikum ϵ_2. Zur Berechnung des $\mathbf{E}$-Feldes in den beiden Bereichen wird die Methode der Bildladungen benutzt.

1. Wir benutzen den folgenden Ansatz für das $\mathbf{E}$-Feld:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_1} \frac{\mathbf{r}-\mathbf{d}}{|\mathbf{r}-\mathbf{d}|^3} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0\epsilon_1} \frac{\mathbf{r}+\mathbf{d}}{|\mathbf{r}+\mathbf{d}|^3} & \text{für } z > 0 \\ \mathbf{E}^{(2)}(\mathbf{r}) = \frac{q''}{4\pi\epsilon_0\epsilon_2} \frac{\mathbf{r}-\mathbf{d}}{|\mathbf{r}-\mathbf{d}|^3} & \text{für } z < 0, \end{cases}$$

   wobei q' und q'' die Bildladungen sind.
   Erklären Sie, warum der Ansatz für den jeweiligen Teilbereichen eine Lösung der Maxwellgleichungen ist.

2. Berechnen Sie q' und q'' indem Sie die Stetigkeitsbedingungen für das $\mathbf{E}$ und $\mathbf{D}$ Feld bei $z = 0$ ausnutzen.

3. Plotten Sie die Feldlinien für die Beiden Fälle (i) $\epsilon_2 > \epsilon_1$ und (ii) $\epsilon_2 < \epsilon_1$.