Prof. Dr. Tobias Brandes
Dipl.-Phys. Arash Azhand, Dipl.-Phys. Valentin Flunkert, Dipl.-Phys. Philipp Zedler
Benjamin Regler, Jan Techter

11. Übungsblatt zur Theoretischen Physik III: Elektrodynamik

Abgabe: Montag 24.01. bis 10:00 in den Briefkasten im Ernst-Ruska Gebäude (Physik Altbau). Die Abgabe erfolgt in **3er Gruppen**.

Aufgabe 29 (2+2+1+1=6 Punkte): *Gruppen*

(a) Zeigen Sie, dass die Matrizen

$$M = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad \det M = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$$

eine Gruppe unter Matrixmultiplikation bilden.

(b) Jede dieser Matrizen definiert eine Möbiustransformation T der erweiterten Zahlengeraden $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$:

$$T(M): \quad x \mapsto x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}.$$

Zeigen Sie, dass die Möbiustransformationen unter Komposition eine Darstellung der Matrizengruppe bilden:

$$T(M_1) \circ T(M_2) = T(M_1\, M_2).$$

(c) Wir schreiben einen Vierervektor $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ nun als Matrix

$$g(x) = \begin{bmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{bmatrix}.$$

Ist diese Transformation eindeutig? D.h. kann man aus einer gegebenen Matrix wieder den Vierervektor extrahieren?

Zeigen Sie, dass die Minkowskimetrik von x gegeben ist durch $\det(g(x))$.

(d) Sei M eine der Matrizen aus 1. Wir transformieren den Vierervektor x in Matrixdarstellung durch

$$g(x) \mapsto M\, g(x)\, M^T.$$

Welche Bedingung muss M erfüllen, damit die Minkowskimetrik erhalten ist und damit M die Darstellung einer Lorentztransformation ist.

Aufgabe 30 (3+4=7 Punkte): *Winkeltransformation in der speziellen Relativitätstheorie*
Es seien Σ und Σ' zwei mit $\underline{v} = v\,\underline{e}_x$ relativ zueinander bewegte Inertialsysteme. Beantworten Sie die beiden folgenden Fragen mit Hilfe der allgemeinen Lorentztransformation (d.h. ohne Ausnutzung der speziellen Kontraktions- und Dilatationsformeln):

(a) Ein in Σ ruhender Stab schließt mit der x-Achse einen Winkel von $45°$ ein. Welchen Winkel schließt er mit der x'-Achse in Σ' ein?

(b) Ein Teilchen habe in Σ die Geschwindigkeit $\underline{u} = v\,\underline{e}_y + 2v\,\underline{e}_x$. Welchen Winkel bildet seine Bahn mit der x-Achse in Σ und Σ'?

Aufgabe 31 (1+3+3=7 Punkte): *Wellengleichung*
Die Wellengleichung ist eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\partial_{xx} f(x,t) - \frac{1}{c^2}\partial_{tt} f(x,t) = 0,$$

die die Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen beschreibt. Hierbei ist c die Lichtgeschwindigkeit und $\partial_{xx} := \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ und $\partial_{tt} := \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ sind die zweiten partielle Ableitungen nach Ort und Zeit.

(a) Zeigen Sie, dass für jede Funktionen $\phi(\cdot)$ die Funktion $f(x,t) := \phi(x \pm ct)$ eine Lösung der Wellengleichung ist. Wie verhalten sich diese Lösungen anschaulich?

Bei einer Koordinatentransformation

$$\tilde{x} = \tilde{x}(x,t), \qquad \tilde{t} = \tilde{t}(x,t), \qquad \tilde{f}(\tilde{x},\tilde{t}) = f(x,t)$$

transformieren sich Ableitungen gemäß

$$\frac{\partial \bullet}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x}\frac{\partial \tilde{\bullet}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{t}}{\partial x}\frac{\partial \tilde{\bullet}}{\partial \tilde{t}}, \qquad \frac{\partial \bullet}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{x}}{\partial t}\frac{\partial \tilde{\bullet}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{t}}{\partial t}\frac{\partial \tilde{\bullet}}{\partial \tilde{t}},$$

wobei $\bullet$ ein Platzhalter für eine beliebige Funktion ist.

(b) Transformieren Sie die Wellengleichung mit der Galilei-Transformation

$$\tilde{x} = x + vt\,,$$
$$\tilde{t} = t$$

(benutzen Sie die Notation $\partial_{xt} = \partial_{tx} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial t}$).
Ist die Wellengleichung invariant unter Galilei-Transformation (d.h. hat sie in den $\sim$ Koordinaten dieselbe Form)?

(c) Zeigen Sie, dass die Wellengleichung invariant unter Lorentz-Transformationen ist

$$\tilde{x} = \gamma(x - vt) \qquad \text{mit} \qquad \gamma := \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$\tilde{t} = \gamma(t - \frac{vx}{c^2}).$$

Bonusaufgabe 32 (6 Zusatzpunkte): *Relativistisch bewegter Stab*

Betrachten Sie folgendes zweidimensionales Problem: Ein Stab bewegt sich auf eine Öffnung zu, die sich in ihrem Ruhsystem auf der x-Achse befindet und 9 Meter breit ist. Im Ruhsystem der Öffnung bewegt sich der Stab mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v} = v_x \mathbf{e}_x - v_y \mathbf{e}_y$ auf das Loch zu und zum Zeitpunkt $t = 0$ ist der Schwerpunkt des Stabes mit dem Zentrum der Öffnung identisch. Während der Bewegung ist der Stab immer entlang der x-Achse ausgerichtet sein. Er besitzt in seinem Ruhsystem die Länge 18 Meter.

(a) Erklären Sie durch Rechnung, dass für $\sqrt{1 - \frac{v_x^2}{c^2}} = \frac{1}{3}$ der Stab ohne Kollision durch das Loch hindurchgeht.

(b) Funktioniert der Durchgang auch aus Sicht des Stabes?

Hinweis: Die Lorentz-Transformation für zwei Bezugssysteme, die sich geradlinig gleichförmig zueinander mit einer beliebigen Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ bewegen und deren Ursprünge zum Zeitpunkt $t = 0$ zusammenfallen, ist gegeben durch:
$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + (\gamma - 1)(\mathbf{x} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}/v^2 - \gamma t \mathbf{v}$
$t' = \gamma t - \gamma \mathbf{v} \cdot \mathbf{x}/c^2$ mit $\gamma = (\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}})^{-1}$.