Prof. Holger Stark,
Stefan Fruhner, Niels Majer, Maximilian Schmitt, Andreas Zöttl,
Christian Fräßdorf, Wassilij Kopylov, Benjamin Regler, Emely Wiegand

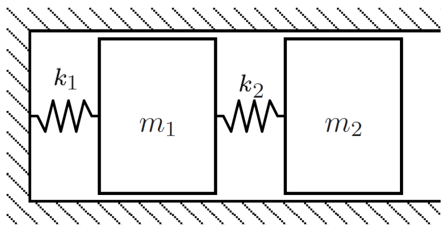
10. Übungsblatt – Theoretische Physik I: Mechanik

Abgabe: Di. 10.01.2012 bis 8:30 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Zweiergruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium (Tutor und Termin) an. Kreuzen Sie am Beginn des Tutoriums die mündlichen Aufgaben an, die Sie bearbeitet haben und an der Tafel vorrechnen können.

Aufgabe (30): *Gekoppelte Schwingungen* **(mündlich)**

Skizziert ist ein System aus zwei schwingenden Massen. Die Bewegungsgleichungen für die Auslenkungen x_1 und x_2 sind gegeben durch



$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= -(k_1+k_2)x_1 + k_2 x_2 \ , \\ m_2\ddot{x}_2 &= k_2 x_1 - k_2 x_2 \ . \end{aligned}$$

(a) Leiten Sie die Bewegungsgleichungen her.

(b) Schreiben Sie das Differentialgleichungssystem in Matrixform $\underline{\ddot{x}} = \underline{\underline{M}}\,\underline{x}$ mit $\underline{x} = (x_1, x_2)^T$. Verwenden Sie $k_1 = 2k, k_2 = k, m_1 = 2m, m_2 = m$ und zeigen Sie, dass Sie mit dem Ansatz $\underline{x} = \underline{c}e^{\lambda t}$ ein Eigenwertproblem erhalten.

(c) Berechnen Sie die Eigenwerte(Eigenfrequenzen) und Eigenvektoren der Matrix $\underline{\underline{M}}$.

(d) Interpretieren Sie die möglichen Eigenschwingungen physikalisch und geben Sie den Lösungsvektor $\underline{x}(t)$ an.

Aufgabe 31 (20 Punkte): *Geigensaite***(schriftlich, 3+3+2+2+4+3+3)**
Die Auslenkung einer Saite wird beschrieben durch die Wellengleichung:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \text{mit} \quad w = w(x,t) \ . \tag{1}$$

I. Sinusförmige Auslenkung
Lösung nach D'Alembert

(a) Zeigen Sie, dass man durch die Transformation $z_1 = x - ct$, $z_2 = x + ct$ aus (1) die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z_1 \partial z_2} = 0 \ ,$$

erhält.

(b) Wie lautet die allgemeine Lösung in **Abhängigkeit einer gegebenen Anfangsauslenkung** $w(x,0)$ **und Anfangsgeschwindigkeit** $\dot{w}(x,0)$?

(c) Bestimmen Sie nun $w(x,t)$ für eine an den Rändern fest eingespannten Saite ($w(0,t) = w(l,t) = 0$) der Länge l mit $w(x,0) = w_0 \sin\frac{\pi x}{l}$ und $\dot{w}(x,0) = 0$. Interpretieren Sie die Lösung.

Lösung nach Fourier/Bernoulli

(d) Separieren Sie (1) in einen Orts- und einen Zeitanteil gemäß $w(x,t) = X(x)T(t)$ und bestimmen Sie die allgemeine Lösung.

(e) Verwenden Sie die Anfangs- und Randbedingungen aus (c) um $w(x,t)$ zu bestimmen. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Resultat aus (c).

II. Rechteckförmige Auslenkung

Betrachten Sie nun eine Saite mit den gleichen Randbedingungen wie in (c) und den Anfangsbedingungen

$$w(x,0) = \begin{cases} w_0 & \text{für } l/4 \leq x \leq 3/4l\ , \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad , \quad \dot{w}(x,0) = 0\ .$$

Lösung nach D'Alembert

(f) Bestimmen Sie $w(x,t)$ mit Hilfe von (b) und skizzieren Sie $w(x,t)$ für verschiedene Zeiten zwischen $ct = 0$ und $ct = l$.
Hinweis: Setzen Sie die Lösung $w(x,t)$ an den Rändern geeignet fort um die Randbedingungen zu erfüllen.

Lösung nach Fourier/Bernoulli

(g) Bestimmen Sie $w(x,t)$ mit Hilfe von (d).
Hinweis: Berechnen Sie das Integral $\int_0^l w(x,0)\sin(n\pi x/l)dx$ zur Bestimmung der Koeffizienten der allgemeinen Lösung. Verwenden Sie die Orthogonalitätsrelation $\int_0^1 \sin(n\pi x)\sin(m\pi x)dx = 1/2\,\delta_{nm}$ für $n, m = 1, 2, ...$

Sprechzeiten:	Name	Tag	Zeit	Raum	Tel.
	Prof. Holger Stark	FR	11:30–12:30 Uhr	EW 709	29623
	Stefan Fruhner	FR	14:30–15:30 Uhr	EW 627/28	27681
	Niels Majer	DO	13:00–14:00 Uhr	ER 240	29052
	Max Schmitt	DO	10:00–11:00 Uhr	EW 708	25225
	Andreas Zöttl	MI	11:00–12:00 Uhr	EW 702	24253
	Christian Fräßdorf	DI	18:00–19:00 Uhr	EW 060	26143
	Benjamin Regler	MO	13:00–14:00 Uhr	EW 060	26143
	Wassilij Kopylov	MO	16:00–17:00 Uhr	EW 060	26143
	Emely Wiegand	MO	12:00–13:00 Uhr	EW 060	26143

Aktuelle Informationen werden auf der Webseite bekannt gegeben:
http://www.tu-berlin.de/index.php?id=109406