Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik 12. Dezember 2011

Prof. Holger Stark,
Stefan Fruhner, Niels Majer, Maximilian Schmitt, Andreas Zöttl,
Christian Fräßdorf, Wassilij Kopylov, Benjamin Regler, Emely Wiegand

9. Übungsblatt – Theoretische Physik I: Mechanik

Abgabe: Di. 03.01.2012 bis 8:30 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Zweiergruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium (Tutor und Termin) an. Kreuzen Sie am Beginn des Tutoriums die mündlichen Aufgaben an, die Sie bearbeitet haben und an der Tafel vorrechnen können.

Aufgabe (24): *Trägheitsellipsoid* **(mündlich)**

Betrachtet man die kinetische Rotationsenergie eines starren Körpers $T = 1/2\, \boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{\omega}$ und substituiert $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\omega}/\sqrt{2T}$, dann erhält man

$$1 = \sum_{ij} \rho_i \Theta_{ij} \rho_j = \rho_i \Theta_{ij} \rho_j$$

(a) Zeigen Sie, dass dies die Gleichung für die Oberfläche eines Ellipsoiden ist.

(b) Zeigen Sie, dass der Drehimpuls $\mathbf{L}$ zu einer gegeben Richtung der Rotation $\boldsymbol{\rho}$ immer senkrecht auf der Oberfäche des Trägheitsellipsoiden steht.

Aufgabe 25 (7 Punkte): *Stabile Lagen der Rotation* **(schriftlich 2+5)**
Gegeben sei ein starrer Körper ohne Einfluss äußerer Kräfte mit Hauptträgheitsmomenten $\Theta_1 \neq \Theta_2 \neq \Theta_3$.

1. Zeigen Sie, dass eine Rotation um eine Hauptträgheitsachse Lösung der Eulergleichungen ist.

2. Testen Sie, unter welchen Bedingungen diese Lösungen unter Einfluss einer kleinen Störung stabil sind. Lösen Sie dazu die Eulerschen Gleichungen unter folgenden Annahmen:

   - Betrachten Sie eine Bewegung, die geringfügig von der ungestörten Lösung abweicht (z.B $\omega_1 \approx \omega_1^0,\ \omega_2 \ll \omega_1^0,\ \omega_3 \ll \omega_1^0$).
   - Linearisieren Sie die Gleichungen, indem Sie Terme, die in den kleinen Größen ($\omega_2,\ \omega_3$) quadratisch sind, vernachlässigen.
   - Bleiben die Störungen klein unter zeitlicher Entwicklung, dann nennen wir die ungestörte Lösung stabil.

Aufgabe 26 (4 Punkte): *Physikalisches Pendel* **(schriftlich 2+2)**
Gegeben sei ein starrer Körper der sich im homogenen Schwerefeld befindet und um eine horizontale Achse ω drehbar gelagert ist. Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung dieses Pendels und vergleichen Sie mit dem Ergebnis für das Fadenpendel. Wie lautet der Energiesatz dieses Pendels?

Aufgabe 27 (9 Punkte): *Trägheitstensor* **(schriftlich 3+3(+1)+3(+2))**
Bestimmen Sie den Trägheitstensor Θ_{ij} folgender Körper:

1. Ziegel konstanter Massendichte mit Kantenlängen a, b, c. Wie sieht Θ_{ij} im Grenzfall eines Würfels aus?

2. Ellipsoid konstanter Massendichte mit Halbachsen a, b, c. Wie sieht der Trägheitstensor im Grenzfall einer Kugel aus?
   Hinweis: Für Ellipsoidkoordinaten gilt: $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = abc\, r^2 \sin\vartheta\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\vartheta\, \mathrm{d}\varphi$
   Bonus (+1 Punkt): Zeigen Sie diese Beziehung, in dem Sie die Funktionaldeterminante berechnen.

3. Methan (CH_4) Molekül. Rechnen Sie in atomaren Masseneinheiten ($m_H = 1$ u und $m_C = 12$ u). Die Bindungslänge betrage l_0.
   Hinweis: Für den Bindungswinkel ϑ gilt: $\sin\vartheta = 2\sqrt{2}/3$. Dies entspricht einem Winkel von $\vartheta \approx 109,5°$
   Bonus (+2 Punkte): Zeigen Sie, dass $\sin\vartheta = 2\sqrt{2}/3$ gilt.

Aufgabe (28): *Satz von Steiner* **(mündlich)**

(a) Beweisen Sie den Satz von Steiner.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Satz von Steiner und dem Ergebnis aus Aufgabe 27.2. den Trägheitstensor eines Körpers der aus zwei identischen, homogenen Kugeln mit Radius R besteht, die an ihrem Berührungspunkt T zusammengeschweißt sind.

Bonusaufgabe 29 (5 Zusatzpunkte): *Weihnachtsmann*
Ein Weihnachtsmann mit Masse m und Trägheitsmoment Θ_0 bezüglich der Rotation um den Schwerpunkt (um die y-Achse) sitzt mit seinem Schwerpunkt in der Höhe h über den Kufen eines masselosen Schlittens, der auf einer ortsfesten Eiskugel mit Radius R steht. Bestimmen Sie für den Fall, daß bei $\theta \approx 0$ gestartet wird, die Bahnkurve $z(x)$ sowie die Eigenrotation $\varphi(x)$. Die Reibung des Schlittens soll vernachläßigt werden.

(a) Bei welchem Winkel θ hebt der Schlitten ab?

(b) Mit welchem Winkel φ erreicht der Weinachtsmann die Auflagefläche der Eiskugel?