Prof. Dr. Tobias Brandes
Dr. Clive Emary
Dipl. Phys. Arash Azhand
Dipl. Phys. Mathias Hayn

13. Übungsblatt – Theoretische Physik V: Quantenmechanik II

Abgabe: Fr. 3.02.2012 11:00 Uhr im Briefkasten am Ausgang des ER-Gebäudes
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 36 (4 Punkte): *Holstein–Primakoff-Transformation*

The Holstein-Primakoff representation of the angular-momentum algebra reads

$$S^z = b^\dagger b - S; \quad S^+ = b^\dagger \sqrt{2S - b^\dagger b}; \quad S^- = \sqrt{2S - b^\dagger b}\, b,$$

where b and $b^\dagger$ are bosonic annihilation/creation operators: $\left[b, b^\dagger\right] = 1$. Show that these Holstein-Primakoff forms satisfy the appropriate angular momentum commutation relations.

Aufgabe 37 (9 Punkte): *Spin-Wellen in einem Antiferromagneten*

The Heisenberg antiferromagnet Hamiltonian reads

$$H = +J \sum_{<n,m>} \mathbf{S}_n \cdot \mathbf{S}_m, \tag{1}$$

with $J > 0$. We consider here a one-dimensional system of N length-S spins with periodic boundary conditions.

(a) The ground state is the Neél state which, in 1D, is a chain of spins with alternating directions. Perform a canonical transformation that rotates the odd-numbered spins by π around the x-axis.

(b) Use the Holstein-Primakoff to rewrite the Hamiltonian of (1) in terms of bosonic operators and show that, in the large spin limit $S \gg 1$, H can be approximated as

$$H = -JNS^2 + JS \sum_m \left[b_m^\dagger b_m + b_{m+1}^\dagger b_{m+1} + b_m b_{m+1} + b_m^\dagger b_{m+1}^\dagger \right] + \mathrm{O}(S^0)$$

(c) Diagonalise this approximate Hamiltonian and find the dispersion of spin-waves in a Heisenberg antiferromagnet. Hint: You will need not only a Fourier transform, but also a Bogoliubov transformation that mixes annihilation and creation operators (cf. theory of superconductors)!

Bitte Rückseite beachten!⟶

Aufgabe 38 (6 Punkte): *Collapse & Revival, u.a.*

Das Rabi-Modell beschreibt die Kopplung eines Zwei-Niveau-Systems an einen Oszillator. In der RWA-Näherung und in Resonanz lautet der Hamilton-Operator dieses Systems

$$\hat{H} = \hbar\omega\Big(\frac{1}{2}\hat{\sigma}_z + \hat{a}^\dagger\,\hat{a}\Big) + g\big(\hat{\sigma}_+\,\hat{a} + \hat{\sigma}_-\,\hat{a}^\dagger\big), \tag{2}$$

mit $\hat{\sigma}_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|$, $\hat{\sigma}_+ = |e\rangle\langle g|$, $\hat{\sigma}_- = \hat{\sigma}_+^\dagger$, $\hat{a}\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$ und $\hat{a}^\dagger\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$. Dabei sind $|g,n\rangle = |g\rangle \otimes |n\rangle$ und $|e,n\rangle = |e\rangle \otimes |n\rangle$ Eigenzustände des freien Hamilton-Operators mit $g = 0$.
Die Eigenzustände des Hamilton-Operators (2) mit $g \neq 0$ sind durch

$$|\pm, n\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}\Big(|g,n\rangle \pm |e, n-1\rangle\Big) \tag{3}$$

und die zugehörigen Eigenenergien durch

$$E_{\pm,n} = \hbar\omega\Big(n - \frac{1}{2}\Big) \pm g\sqrt{n} \tag{4}$$

gegeben.
Mit Hilfe dieser Zustände lässt sich ein beliebiger Zustand zum Zeitpunkt t in der Form

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\Bigg[c_{+,n}\mathrm{e}^{-iE_{+,n}t/\hbar}\,|+,n\rangle + c_{-,n}\mathrm{e}^{-iE_{-,n}t/\hbar}\,|-,n\rangle\Bigg] \tag{5}$$

schreiben.

(a) Begründen Sie den Ansatz (5) für $|\psi(t)\rangle$.

Das Zwei-Niveau-System und der Oszillator sollen zum Zeitpunkt $t = 0$ aus einer beliebigen Superposition aus Grund- $|g\rangle$ und angeregtem Zustand $|e\rangle$, bzw. aus Oszillatorzuständen $|n\rangle$ bestehen,

$$|\psi(t=0)\rangle = \big(c_g\,|g\rangle + c_e\,|e\rangle\big) \otimes \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,|n\rangle\,. \tag{6}$$

Berechnen Sie für die Anfangszustände

(b) Zwei-Niveau-System im angeregten Zustand und Oszillator im Grundzustand,

(c) Zwei-Niveau-System im Grundzustand und Oszillator in einem kohärenten Zustand, und

(d) Zwei-Niveau-System im angeregten Zustand und Oszillator in einem thermischen Zustand ($c_m = \overline{n}^m/(1+\overline{n})^{m+1}$, mit $\overline{n} = \langle\hat{a}^\dagger\,\hat{a}\rangle_{\mathrm{th}}$)

die Wahrscheinlichkeit $P_e(t)$, dass sich das System zum Zeitpunkt t im angeregten Zustand $|e\rangle$ befindet und zeichnen Sie $P_e(t)$. Wählen Sie dabei geeignete Parameter und Zeitintervalle. Insbesondere sollten Sie für die Anfangszustände in Teilaufgabe (c) ein Verschwinden und Wiederauftreten von Oszillationen beobachten. Zeichnen Sie $P_e(t)$ aus Teilaufgabe (d) für verschiedene Temperaturen/mittlere Besetzungen, z. B. $\overline{n} = 0.1, 15, 100$, und diskutieren Sie Ihre Ergebnisse.