Statistische Physik

Stochastik („Kunst des Vermutens") < Wahrscheinlichkeitstheorie / Statistik ("den Staat betreffend")

- deskriptive Statistik (Erstellung von Statistik, Daten Aufarbeitung)
- induktive Statistik auch schließende Statistik
  Eigenschaften einer Grundgesamtheit (Zielpopulation)
  Schätz- und Testtheorie
- explorative Statistik ⊛ Data-Mining, was ist Wertvolles?

Statistische Physik mit
- bestimmten Ensemble (Gesamtheit)
- Ergodizität

[nicht Physik der Gase, Flüssigkeiten und Festkörper (... Plasma)
so wie Analysis nicht die Theorie der Planetenbahnen ist.
Es ist "more and less than that" (Susskind)]

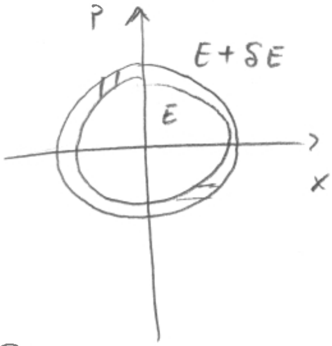
mathematische Theorie mit Anwendungen

- Gase, Flüssigkeit und Festkörper (... Plasma)
- neuronalen Netzwerken
- Computerwissenschaften
- Sozioökonomische Systeme
- ...

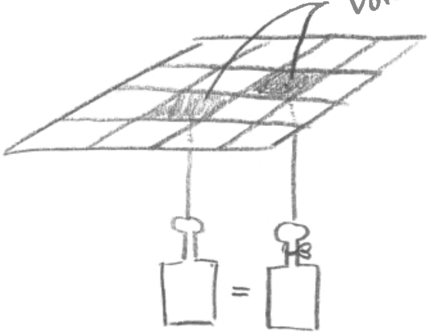
⊛ vgl. Bayesscher Wahrscheinlichkeitsbegriff
Thomas Bayes 18. Jht.

Ein isoliertes System im Gleichgewicht ist gleichwahrscheinlich in jedem seiner zugänglichen gleiche Phasenraum-volumen Zustände

Teilchen im Volumen V



Phasenraum eines 1D harmonischen Oszillators



Wahrscheinlichkeits-gewichte

Random-Walk (ohne Wände)

Wahrscheinlichkeit $W_N(n)$, d.h. nach N Schritten wurden n Schritte in <u>eine Richtung</u> getan.

$$W_N(n) = [N!/n!(N-n)!]\,p^n q^{N-n}$$

$p \equiv$ Wahrscheinlichkeit Schritt $\rightarrow$ (rechts)

$q = 1-p$ " " $\leftarrow$ (links)

(s. Übung)

Maßtheorie als Grundlage für Zufallsexperimente

Elementarereignisse

Ergebnismenge $\Omega := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$

endlich oder abzählbar unendlich

$\mathcal{E} = \mathcal{P}(\Omega)$ sei Potenzmenge von Ω

Das Paar $(\Omega, \mathcal{E})$ ist ein diskreter Ereignisraum.

Eine Teilmenge von Ω heißt Ereignis.

Die einelementige Menge ω heißt Elementarereignis.

$\emptyset$ unmögliches Ereignis (leere Menge)

Ω sicheres Ereignis

(x y z)
(x y) (x z) (y z)
(x) (y) (z)
($\emptyset$)
$\mathcal{P}(\{x, y, z\})$

Weil Elementarereignisse von allgemeinen Ereignissen manchmal sinnvollerweise unterschieden werden bezeichnet man sie auch als Ergebnisse

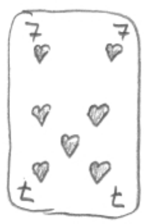
Ergebnissmenge Ω kann auch das kartesiche Produkt sein

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \Omega_n = \bigotimes_{i=1}^{n} \Omega_i$$

Beispiel 2 Würfel oder Skat-Karten

$$\Omega_1 = \{K, P, H, k\}$$

$$\Omega_2 = \{7, 8, 9, 10, B, D, K, Ass\}$$



Mengensysteme (unterschiedlich stark gegenüber Mengenoperationen abgeschlossen) ②

Def: Ring in Ω (Mengenring)

Es sei Ω eine beliebige nichtleere Menge. Ein System R von Teilmengen von Ω heißt Ring in Ω, wenn gilt

Abgeschlossenheit Vereinigung Differenz

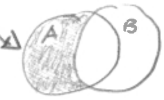
(A1) $\emptyset \in R$

(A2) $A, B \in R \Rightarrow A \setminus B \in R$

(A3) $A, B \in R \Rightarrow A \cup B \in R$

wenn $A = \Omega$

$\bar{B} := A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$



$\cup$ Vereinigung: "oder"

$\cap$ Durchschnitt: "und"

Der kleinste Ring über Ω ist $\{\emptyset\}$

Beweis: R ist nicht leer $\Rightarrow \emptyset = A \setminus A \in R$ □

Def: Algebra auf Ω

Es sei Ω eine beliebige nichtleere Menge. Ein System $\mathcal{A}$ von Teilmengen von Ω heißt Algebra auf Ω, wenn es folgende Eigenschaften besitzt:

Abgeschlossenheit bezüglich Komplement

(A1) $\Omega \in \mathcal{A}$ (alt. $\mathcal{A} \neq \emptyset$)

(A2) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$ ($\bar{A} = \Omega \setminus A$)

(A3) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

Kleinste Algebra auf Ω ist $\{\emptyset, \Omega\}$

(im eglischen "algebra" oder oft auch "field")

Def. σ-Algebra auf Ω

Es sei Ω eine beliebige nichtleere Menge.
Ein System $\mathcal{A}$ von Teilmengen von Ω heißt
σ-Algebra auf Ω, wenn gilt

(A1) $\Omega \in \mathcal{A}$

(A2) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$

(A3) Für jede Folge $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von Elementen aus $\mathcal{A}$ ist auch die Menge $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ein Element von $\mathcal{A}$

Beispiel: A Teilmenge von Ω: $\{\Omega, \emptyset, A, \Omega \setminus A\}$ kleinstmögliche σ-Algebra, die A enthält.

"σ" soll an die Abzählbarkeit erinnern!

= Übung

<u>Ausgangspunkt</u> für <u>Maßraum</u>.

Zunächst: das Paar $(\Omega, \underbrace{\mathcal{A}}_{\sigma\text{-Algebra}})$ nennt man Messraum.
(heute eher messbarer Raum)

[Jedes Element A von $\mathcal{A}$ heißt messbar, da die charakteristische Funktion χ_A (Indikator Funktion) messbar ist

$$\chi_A : \mathcal{A} \to \{0, 1\}, \quad \underset{B \in \mathcal{A}}{B} \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } B \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$]

Def. Maß

Sei $\mu: \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion, die jeder Menge A aus der σ-Algebra $\mathcal{A}$ über Ω einen Wert $\mu(A)$ in der Menge $\overline{\mathbb{R}}$ (erweiterte reelle Zahlen).

Man nennt μ ein Maß, falls

(A1) $\mu(\emptyset) = 0$

(A2) $\mu(A) \geq 0$ für alle $A \in \mathcal{A}$ (Positivität)

(A3) Ist $A_1, A_2, \dots$ eine Folge in $\mathcal{A}$ mit

$A_i \cap A_k = \emptyset$ (paarweise disjunkt) für $i \neq k$

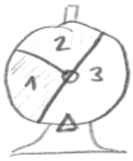
$$\mu\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$ abzählbar additiv

(Nebenbemerkung: Es gibt auch "Inhalt" und "Prämaß")

Maßraum

Eine Struktur $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ heißt Maßraum, wenn $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum ist und μ ein auf diesem Messraum definiertes Maß.

Typisches Beispiel für einen Maßraum ist der Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, Σ, P)



$\Omega = \{1, 2, 3\}$ Ergebnismenge

$$\Sigma = \{ \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \overset{\overset{\Omega}{\Downarrow}}{\{1,2,3\}} \}$$

Ereignisalgebra

$$P(\Omega) = 1$$

Für paarweise disjunkte Ereignisse $A_1, A_2, \dots$

$$P\Big(\bigcup_{i \geq 1} A_i\Big) = \sum_{i \geq 1} P(A_i)$$

s. (A3) Def. Maß