

Drei einfache Beispiele

1. Münze werfen



Symmetrie $\Rightarrow$ a priori Wahrscheinlichkeit

Kopf $\frac{1}{2}$
Zahl $\frac{1}{2}$

Wahrer weiß ich, was was ist?
(perfekte Symmetrie?)

1 mal werfen $N=2$
2 " " $N=4$
3 " " $N=8$
n " " $N=2^n$

Beispiel: K Z Z Z K Z K Z K K
 $n=5$

Ergebnismenge $\Omega_5: \{ (K Z Z Z K), \dots \}$

2^5 -elementige Menge

2. a) Farbwürfel



R G B C M Y
 $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$

b) Dynamischer Farbwürfel

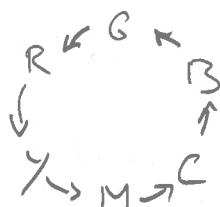
$\downarrow$
Es gelten Bewegungsgleichungen

Unkenntnis sei durch

Beschränkung in der Beobachtung gegeben!

Bewegungsgleichung I

R $\rightarrow$ Y
G $\rightarrow$ R
B $\rightarrow$ G
C $\rightarrow$ B
M $\rightarrow$ C
Y $\rightarrow$ M



Beobachtung an
zufälligen Zeitpunkten

$$\Rightarrow p_i = \frac{1}{6}$$

$p_i \equiv$ Wahrscheinlichkeit von Zustand i

Was kann schief gehen?

• Farbenblindheit?

$$R \equiv B$$

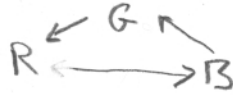
• Symmetrie nicht gegeben

• Umgebung beeinflusst
Wahrscheinlichkeiten

• Zeitsymmetrie?

Beweg. Gl. II

$R \rightarrow B$
 $G \rightarrow R$
 $B \rightarrow G$
 $C \rightarrow Y$
 $M \rightarrow C$
 $Y \rightarrow M$



? zwei Zyklen

$$P(R \ G \ B) \stackrel{!}{=} \frac{1}{3} ? \quad P(Y \ M \ C) = 0 ?$$

Zyklus bleibt erhalten? Erhaltungsgrößen einführen!

messen oder aus
 anderen Informationen (statistischer Natur)

Bewegungsgleichungen + alle Erhaltungsgrößen

Beispiel spiegelt die Grundsystematik in Statistischer Physik wider.

gegeben

bestimmt

3. Gekoppeltes Würfelpaar (Summe der Augen konstant)



Summe $S=8$

$S=2$	1 Zustand	$(1,1)$
$S=3$	2 Zustände	$(1,2) (2,1)$
$S=4$	3 "	$(1,3) (2,2) (3,1)$
$\vdots$		
$S=11$	2 "	...
$S=12$	1 "	$(6,6)$

Ohne weitere Kenntnis
 nehmen wir je
 einen Zyklus an
 mit a priori Wahrscheinl.
 gleichverteilung in den
 Zuständen,

Zyklus bedeutet: deterministisch, nur scheinbar statistisch.

Sind alle Bewegungsgleichungen möglich?

$R \rightarrow R$

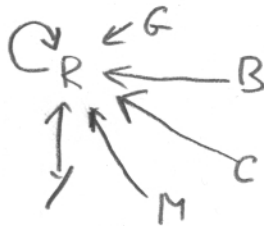
$G \rightarrow R$

$B \rightarrow R$

$C \rightarrow R$

$H \rightarrow R$

$Y \rightarrow R$



a priori
Wahrscheinlichkeit
geht verloren!

(Folglich geht auch Information verloren)

In jedem Zyklus zu einer Erhaltungsgröße
sollen Zustände gleichwahrscheinlich sein, so
dass eine Erhaltung der Wahrscheinlichkeiten.

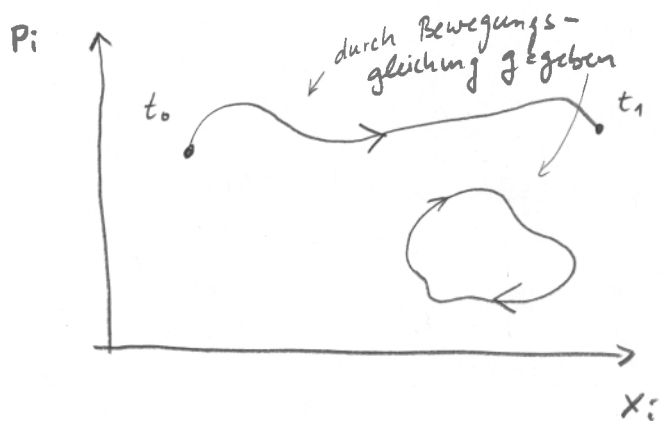
Beimerkung: wir bleiben noch bei einfachen
Beispielen und dem Begriff
der Information.

Allerdings vorab kurzer

Exkurs zu kontinuierlichen Systemen
und klassischer Mechanik:

Exkurs: Anfang

Die drei Beispiele waren diskret. In der klassischen Mechanik haben wir aber einen kontinuierlichen Phasenraum.

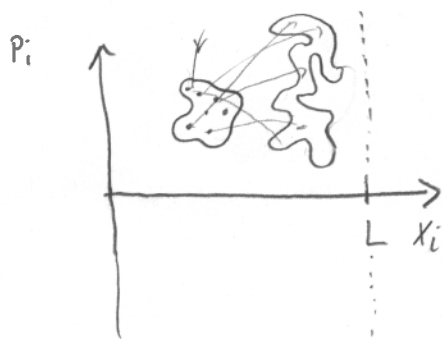


jeder Punkt im Phasenraum zugänglich? Führt zur Frage: Woher kommt die a priori Wahrscheinlichkeit.

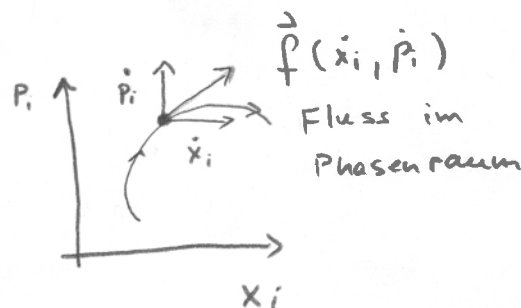
Moleküle im Kasten
Volumen im Phasenraum



nie!
Erhaltung der Wahrscheinlichkeit



ein Molekül



Satz von Liouville : $\text{div } \vec{f} = 0$ (Quellenfreier Fluss)

$$\text{div } \vec{f} = \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} + \underbrace{\left[\frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial \dot{p}_1}{\partial p_1} + \frac{\partial \dot{p}_2}{\partial p_2} + \dots \right]}_{\text{heben sich auf}}$$

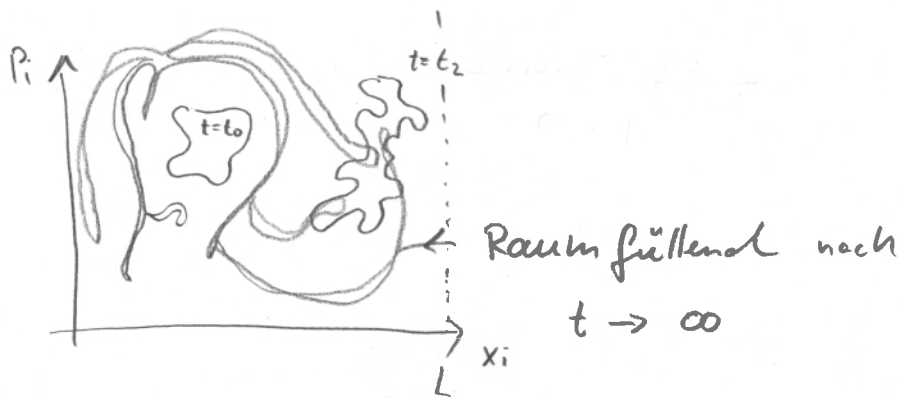
$$H(q, p) = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{q})$$

(allgemein, generalisierte Koordinaten q_i und Impulse p_i)

$$\dot{x}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad ; \quad \dot{p}_k = - \frac{\partial H}{\partial x_k} \Rightarrow \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial x_k} + \frac{\partial \dot{p}_k}{\partial p_k} = 0 \quad \square$$

Achtung: Kurzform, vgl. Landau & Lifschitz II

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{f}) = 0 \quad \rho \equiv \text{Verteilungsfunktion}$$



Zusammenhang mit Ergodenhypothese $\Rightarrow$

Systeme verhalten sich extrem "chaotisch".

(Bemerkung: Begriff des Chaos heute
überwiegend anders belegt)

Energie muss erhalten bleiben und keine
andere Erhaltungsgröße existiert.

Exkurs Ende