

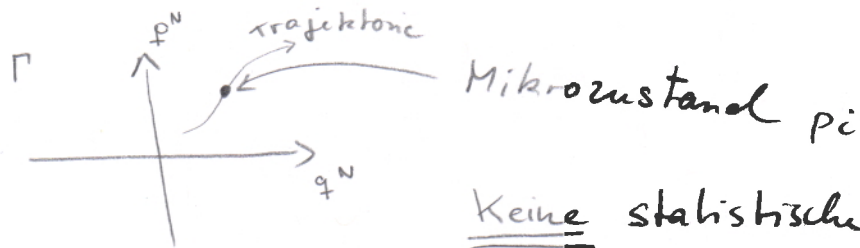
Γ -Raum-Statistik & μ -Raum-Statistik

X ②

Annahme: N-Teilchen-System

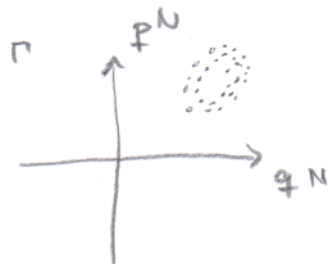
- Γ -Raum Frage: N Teilchenorte und
- geschwindigkeiten (Impulse)
zum Zeitpunkt t

$$q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N, t$$



Keine statistische Beschreibung!

Erst durch Makrozustand mit Hilfe des
Ensemble (Gesamtheit!) $\Rightarrow$ statistische Beschreibung
des Gleichgewichts
(zeitunabhängig)



$$p_i \rightarrow \rho(\Gamma) d\Gamma$$

unterscheidbar $\sum_i \rightarrow \frac{1}{h^{3N}} \int d\Gamma$ (klassisch!)

unterschiedl. $\sum_i \rightarrow \frac{1}{h^{3N} N!} \int d\Gamma$

• μ -Raum Frage: Verteilungsfunktion $f(q, p, t)$

$\underbrace{\mu}_{q, p, t}$ und $dq dp \equiv d\mu$ kurzschreibweise
sechs-dimensional, zeitabhängig

Beachte: $f(\mu, t) d\mu = dN$ daher

$$p_i \rightarrow \frac{1}{N} f(\mu, t) d\mu \quad (1)$$

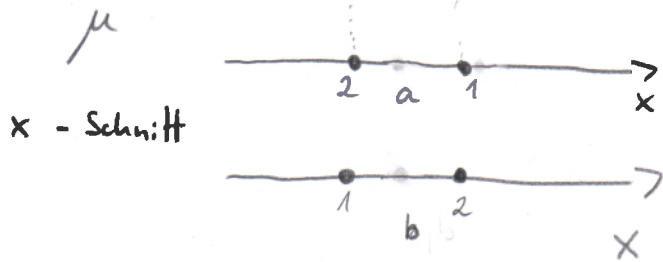
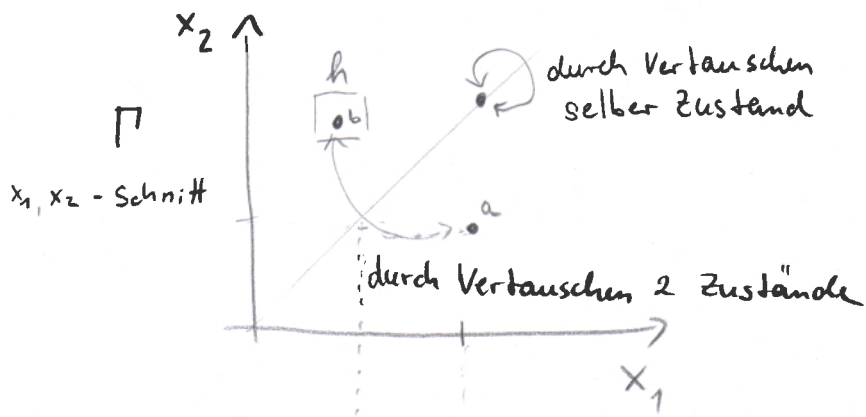
Allerdings für Anzahl der Zustände

$$p_i \sim \frac{\Delta\mu}{N} f(\mu, t) \quad (2)$$

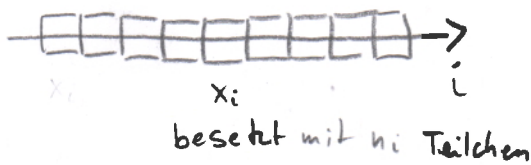
mit $S = Ns$ und $s = -k \sum_i p_i \ln p_i$

$$S' = -k_B \int f \ln \left(\frac{\Delta\mu}{N} f \right) d\mu$$

$$= k_B H + \text{const.}$$



diskret



$$\frac{N!}{n_0! n_1! \dots}$$

Multinomial -
koeffizient

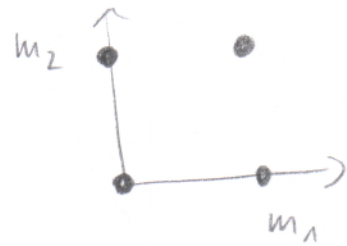
Multiplizität des Zustandes

$\{n_v\}$

↑

Besetzungsschema

Münze 1, Münze 2, ...



Anzahl der Zustände

$$2^N = 4$$

Anzahl der Permutationen

$$N! = 2 \text{ für } N=2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3! = 6$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ \dots \end{pmatrix}$$

Binomialkoeffizient

$$6 \text{ aus } 49 \Rightarrow \binom{49}{6}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \dots \frac{n-(k-1)}{k}$$

$$= \frac{k}{1!} \frac{n+1-j}{j}$$

Unterscheidbare Teilchen $\rightarrow$ Ununterscheidbare Teilchen (4)

$$Z = \left[\sum_v e^{-\beta \epsilon_v} \right]^N = z^N$$

N : Anzahl der
Freiheitsgrade
s. Einschluss

Produkt identischer Ein-Teilchen Summen

$$Z = \sum_v x_v \quad \text{mit} \quad x_v = e^{-\beta \epsilon_v} \quad \text{und}$$

Multinomialstz $(x_0 + x_1 + \dots + x_v)^N = \sum_{\{n_v\}} \frac{N!}{n_0! n_1! \dots} x_0^{n_0} x_1^{n_1} \dots$
(verallg. binomischen Satzes)

Interpretation:

Summe über alle
Besetzungsschemata $\{n_v\}$
Mikro-Nebenbedingung
 $\sum_v n_v = N$

$$E_{\{n_v\}} = \sum_v n_v \epsilon_v$$

Energie des konkreten Besetzungsschema

Zustandssumme aus $E_{\{n_v\}}$

$$Z = \sum_{\{n_v\}} g_{\{n_v\}} e^{-\beta E_{\{n_v\}}}$$

mit $g_{\{n_v\}}$ Multiplizität des Zustandes $\{n_v\}$

für unterscheidbare Teilchen

$$g_{\{n_v\}} = \frac{N!}{n_0! n_1! \dots}$$

Anzahl verschiedener Mikrozustände der Besetzungsschemata

Quantenstatistik: Identische Teilchen sind
ununterscheidbar $\Rightarrow$

Teilchenvertauschung führen nicht zu
verschiedenen (zusätzlichen) Mikrozuständen.

Besetzungszustand $\{n_\nu\}$ legt Mikrozustand
eindeutig fest. (nicht $\frac{N!}{n_0! n_1! \dots}$ -deutig)

Einfluss auf a priori Wahrscheinlichkeit!

$$\boxed{g_{\{n_\nu\}}^n = 1}$$

$$Z^Q = \sum_{\{n_\nu\}} e^{-\beta \sum n_\nu \epsilon_\nu}$$

ist nicht mehr in Ein-Teilchen-Zustandssumme
separierbar!

Was bedeutet das für den Phasenraum?

Gleichverteilungs-Satz

In Γ -Raum Dichteverteilung

$$\rho^M = \frac{\delta(H - U)}{\Omega(U)} \quad \text{Mikrokanonisch}$$

$$\rho^K = \frac{e^{-\beta H}}{Z}$$

Makro-Nebenbedingung

$$\langle H \rangle = \frac{1}{Z} \int H e^{-\beta H} d\Gamma = U$$

Es sei ξ_v irgendeine der $6N$ Orts- oder Impuls-Koordinaten

$$\left\langle \xi_v \frac{\partial H}{\partial \xi_v} \right\rangle = \frac{1}{Z} \int \xi_v \frac{\partial H}{\partial \xi_v} e^{-\beta H} d\Gamma \quad \text{mit}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_v} e^{-\beta H} = -\beta \frac{\partial H}{\partial \xi_v} e^{-\beta H} \quad \text{gilt}$$

$$\begin{aligned} \left\langle \xi_v \frac{\partial H}{\partial \xi_v} \right\rangle &= \frac{-k_B T}{Z} \int \xi_v \frac{\partial}{\partial \xi_v} e^{-\beta H} d\Gamma \\ &= k_B T \quad (\text{partiell integrieren}) \end{aligned}$$

Wenn $H_v = a_v \xi_v^2$ und

$$H = H_v + \hat{H}(\dots \xi_v \dots)$$

[↑]
unabhängig von ξ_v

folgt mit $\frac{\partial H}{\partial \xi_v} = 2 a_v \xi_v = 2 \frac{H_v}{\xi_v}$

$$\bar{\varepsilon}_v = \langle H_v \rangle = \frac{1}{2} k_B T$$

auf jeden Freiheitsgrad einer Koordinate
die mit additiven quadratischen Beitrag
zur Hamiltonfunktion eingeht,
entfällt im GG die Energie $\frac{k_B T}{2}$.