

Ideals Fermi/Bose-Gas

XI (1)

Mikro-Nebenbedingung $\sum_{\nu} n_{\nu} = N$ führt zu Schwierigkeiten, da Zustandssumme (vgl.) nicht mehr in Ein-Teilchen-Zustandssummen separierbar. Lösung Quantengase großkanonisch beschreiben.

Makro-Nebenbedingung $\bar{N} = \langle N_{\{n_{\nu}\}} \rangle$

mit $N_{\{n_{\nu}\}} = \sum_{\nu} n_{\nu}$ Anzahl im Besetzungsschema $\{n_{\nu}\}$

weiterhin: $E_{\{n_{\nu}\}} = \sum_{\nu} n_{\nu} \varepsilon_{\nu}$ Energie "

$$Z_G = \sum_{\{n_{\nu}\}} e^{-\sum_{\nu} n_{\nu} (\beta \varepsilon_{\nu} + \gamma)}$$

mit $\mu = -\frac{\gamma}{\beta}$

↑
Summe über alle Besetzungsschemata

$$Z_G = \sum_{\{n_{\nu}\}} e^{-\beta \sum_{\nu} n_{\nu} (\varepsilon_{\nu} - \mu)}$$

und analog

$$P_{\{n_{\nu}\}} = \frac{1}{Z_G} e^{-\beta \sum_{\nu} n_{\nu} (\varepsilon_{\nu} - \mu)}$$

Wahrscheinlichkeit des Besetzungsschemas $\{n_{\nu}\}$

(Achtung die einzelnen $\{n_{\nu}\}$ haben keinen Index)
sie sind der Index in $\sum_{\{n_{\nu}\}}$ schrittweise

(2)

Vorteil [⊗]: n_ν von Nebenbedingung befreit, können alle Werte unabhängig von einander durchlaufen.

Hilfsschreibweise: • $y_\nu = e^{-\beta(\epsilon_\nu - \mu)}$

• $\sigma_\nu = \sum_{n_\nu} y_\nu^{n_\nu}$

⊗
$$Z_G = \sum_{\{n_\nu\}} \prod_{\nu=0}^{\infty} e^{-\beta n_\nu (\epsilon_\nu - \mu)} = \sum_{\{n_\nu\}} \prod_{\nu=0}^{\infty} y_\nu^{n_\nu}$$

$$= \sum_{n_0=0}^{\infty} y_0^{n_0} \sum_{n_1=0}^{\infty} y_1^{n_1} \dots = \prod_{\nu} \sum_n y_\nu^n = \prod_{\nu} \sigma_\nu$$

⊗ da $\sum_{\{n_\nu\}}$ über alle möglichen Kombinationen der n_ν ohne Mikro-Nebenbed. $\sum n_\nu = N$, kann Summe als Produkt umgeschrieben werden.

Analog:

$$P_{\{n_\nu\}} = \frac{1}{Z_G} \prod_{\nu} y_\nu^{n_\nu} = \prod_{\nu} P_\nu(n_\nu)$$

mit $P_\nu(n) = \frac{y_\nu^n}{\sigma_\nu}$

$P_{\{n_\nu\}}$

↑
definition der Funktion $P_\nu(n)$

$P_\nu(n_\nu)$ ist der Wert bei n_ν !

$P_{\{n_v\}}$ zerfällt in Produkt unabhängiger

Wahrscheinlichkeiten " $p_v(n_v)$ ": Wahrscheinlichkeit

das v -te Zustand mit n_v Teilchen besetzt ist.

- klassisch: ununterscheidbare Teilchen - qm: ununterscheidbare qm. Zustände

σ_v "Ein-Zustand"-Teilchensumme
einzel. qm. Zustand

- Fermionen (Fermi-Dirac-Statistik)

$$\sigma_v^{FD} = 1 + e^{-\beta(\epsilon_v - \mu)} \quad n_v \in \{0, 1\}$$

- Bosonen (Bose-Einstein-Statistik)

$$\sigma_v^{BE} = \frac{1}{1 - e^{-\beta(\epsilon_v - \mu)}} \quad n_v \in \{0, 1, \dots, \infty\}$$

(geometrische Reihe)

Vgl. ② gekoppeltes Würfelpaar

Überlege: Bosonen-Würfel und Fermionen-Würfel

$S=4$ Zustand?

klassisch:

$S=2$	$(1, 1)$
$S=3$	$(1, 2) (2, 1)$
$S=4$	$(1, 3) (3, 1) (2, 2)$

(4)

Mittlere Besetzungszahlen: mit $p_v(n) = \frac{y_v^n}{\sigma_v}$

$$\langle n_v \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n p_v(n) = \frac{1}{\sigma_v} \sum_{n=0}^{\infty} n y_v^n = y_v \frac{d}{dy_v} \ln \sigma_v = \frac{y_v}{1 \pm y_v} \begin{cases} \text{FD} \\ \text{BE} \end{cases}$$

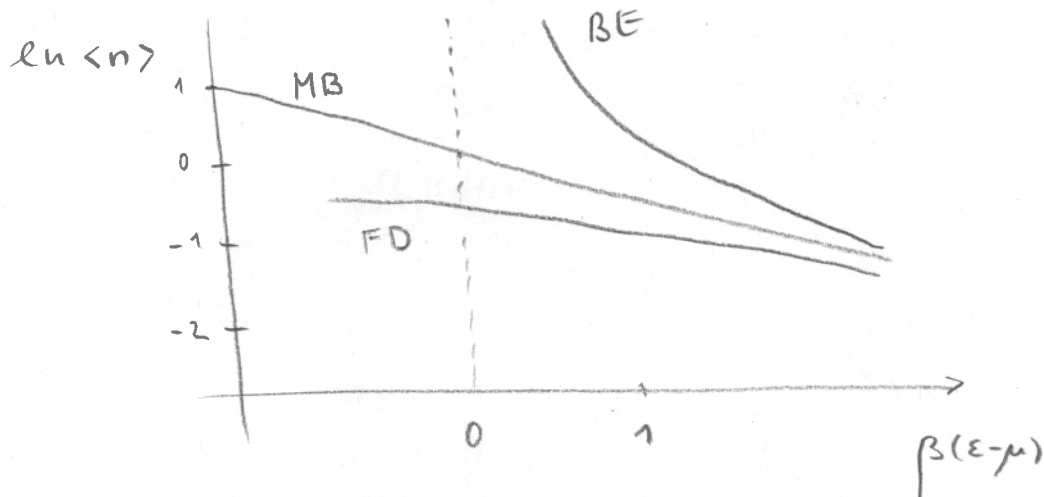
$$\left[y_v \frac{\partial}{\partial y_v} \ln \sigma_v = y_v \frac{1}{\sigma_v} \sum_{n=0}^{\infty} n y_v^{n-1} \right] \square$$

$$\langle n_v \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_v - \mu)} \pm 1} \begin{cases} \text{FD} \\ \text{BE} \end{cases}$$

↑
Quantenkorrektur

$$\langle n_v \rangle^{\text{MB}} = e^{-\beta(\epsilon_v - \mu)} = e^{-\beta \epsilon_v} \cdot e^{\beta \mu} \leftarrow \text{Fugazität}$$

Maxwell Boltzmann



$$\ln Z_G = \sum_v \ln G_v = \pm \sum_v \ln (1 \pm e^{-\beta \epsilon_v - r}) \quad \begin{cases} FD \\ BE \end{cases}$$

$$-pV = \boxed{J = -k_B T \ln Z_G}$$

und mit

$$U = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z_G \Big|_r \quad \text{und}$$

$$\bar{N} = \sum_v \langle N_v \rangle = -\frac{\partial}{\partial r} \ln Z_G \Big|_\beta$$

Ideals Gas im großen Volumen

Einfluss des Volumens

$$\tilde{H} \psi = E \psi \quad \tilde{H} = -\frac{\hbar^2}{2\pi^2 m} \tilde{\nabla}^2 + \tilde{U}(x, y, z)$$

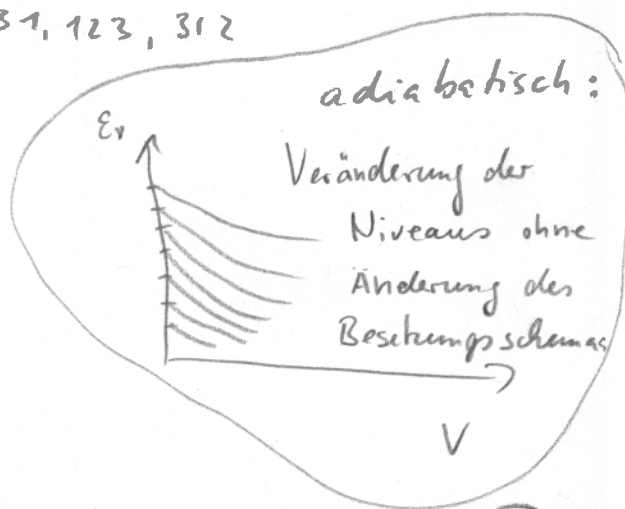
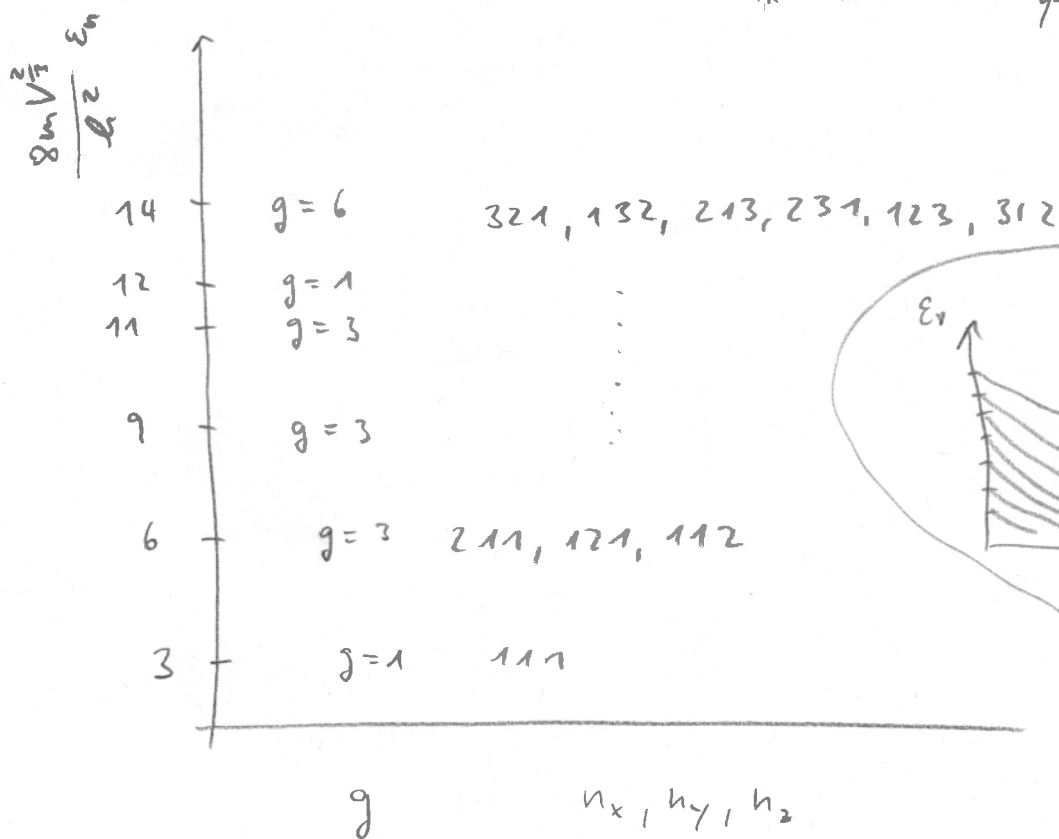
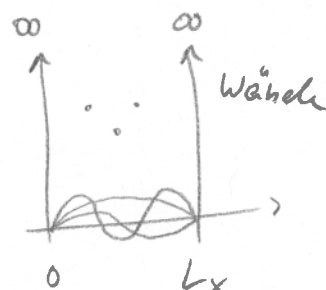
x, y, z Operator der Multiplikation

$$\tilde{p}_x = \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\frac{d^2 \psi_x}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m}{\hbar^2} (\epsilon_x - V_x) \psi_x = 0$$

$$\Rightarrow \epsilon_{n_x} = \frac{\hbar^2}{8m} \frac{n_x^2}{L_x^2} \quad (\epsilon_{n_x} \equiv \epsilon_v \text{ auf Seiten zuvor})$$

n_x Translationsquantenzahlen



• große Volumen "Dichteansatz"

$$\varepsilon_v \rightarrow \varepsilon(p)$$

$$\sum_v \rightarrow \frac{g}{h^3} \int d\mu = \frac{g}{h^3} V \int_0^\infty 4\pi p^2 dp$$

(mit Spinentartung der Energieniveaus $g = 2s + 1$)

$$\ln Z_G = \mp \frac{4\pi g V}{h^3} \int_0^\infty \ln(1 \pm e^{-\beta \varepsilon(p) - \gamma}) p^2 dp \quad \begin{cases} \text{FD} \\ \text{BE} \end{cases}$$

$$\text{mit } \frac{\partial \beta \varepsilon}{\partial \beta} = \frac{\varepsilon}{\beta} \frac{\partial \beta \varepsilon}{\partial \varepsilon} \quad \Bigg| =$$

$$U = \mp \frac{4\pi g V}{h^3} \int_0^\infty \frac{\varepsilon}{\beta} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \ln[\dots] p^2 dp$$

$$\text{mit } \frac{d\varepsilon}{dp} = \varepsilon', \quad \varepsilon(p) = a p^\alpha \quad \text{also} \quad \varepsilon'(p) = \frac{\alpha}{p} \varepsilon(p)$$

$$U = \mp \frac{4\pi g V}{h^3} \int_0^\infty \frac{\varepsilon}{\beta \varepsilon'} \frac{\partial}{\partial p} (\ln[\dots]) p^2 dp$$

$$U = \mp \frac{4\pi g V}{h^3} \frac{1}{\alpha \beta} \int_0^\infty p \frac{\partial}{\partial p} \ln[\dots] dp =$$

$$= \mp \frac{4\pi g V}{h^3} \left(\underbrace{\frac{1}{\alpha \beta} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial p} (\ln[\dots] p^3) dp}_{=0} + \frac{1}{\alpha \beta} \int_0^\infty \ln[\dots] p^2 dp \right)$$

$\Rightarrow$ Grenzen des Integrals

8

vgl mit $k_B T \ln Z_G = -J = pV \Rightarrow$

$$U = \frac{3}{2} pV$$

für $\varepsilon = \frac{p^2}{2m}$ also $\alpha = 2$ • klassisch

$$U = \frac{3}{2} pV$$

für $\varepsilon = pc$ also $\alpha = 1$ hoch relativistische Teilchen • für Photonen oder

$$U = 3pV$$

Quantengase geringe Dichte oder hohe Temperatur

⑨

$$e^{-\gamma} = e^{+\frac{\mu}{k_B T}} \ll 1$$

Fugazität

(nur die wesentlichen Schritte)

Entwicklung Logarithmus $\ln(1 \pm e^{-\beta \varepsilon - \gamma})$

$$\Rightarrow \ln Z_G = \frac{gV}{h^3} e^{-\gamma} \left\{ \int e^{-\frac{\beta p^2}{2m}} d^3p + \frac{1}{2} e^{-\gamma} \int e^{-\frac{\beta p^2}{m}} d^3p \right\}$$

solche Integrale kennen wir nun.

$$\Rightarrow \ln Z_G = \frac{gV}{\lambda_T^3} e^{-\gamma} \left\{ 1 + \frac{e^{-\gamma}}{2} \frac{1}{2^{3/2}} \right\}.$$

$$\bar{N} = \frac{gV}{\lambda_T^3} e^{-\gamma} \left(1 + \frac{1}{2^{1/2}} e^{-\gamma} \right)$$

In erster Näherung

De Broglie-Wellenlänge

$$e^{-\gamma} \approx \frac{1}{g} n \lambda_T^3$$

und

$$pV = \bar{N} k_B T \left(1 \pm \frac{n \lambda_T^3}{12g} \right)$$

Verhältnis mittlerer Teilchenabstand

$$r_0 = n^{-1/3} \text{ zu } \lambda_T \text{ bestimmt also}$$

ob Quanteneffekte auftreten

Grenzfall große Dichte oder niedrige Temperatur

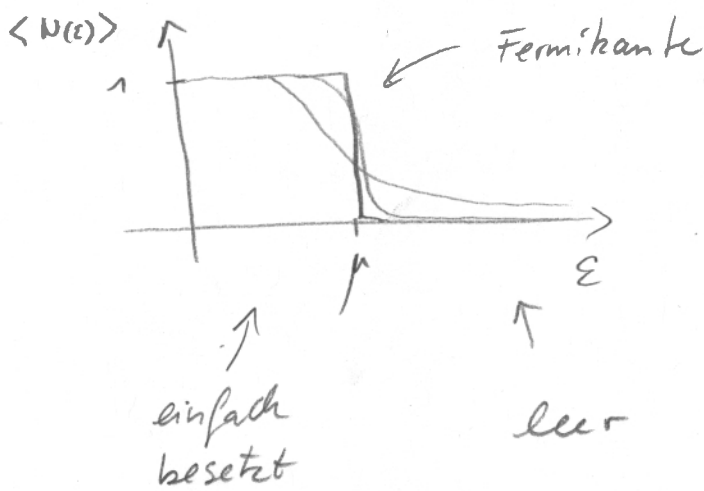
(10)

$$k_B T \ll \mu \quad (\text{oder } \beta \mu \gg 1)$$

$$\langle N(\epsilon) \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} + 1}$$

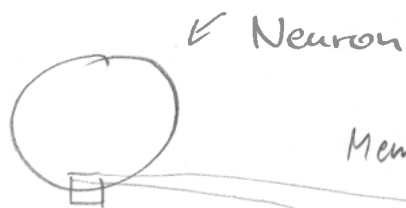
Fermi-Verteilung

gegen Stufenfunktion



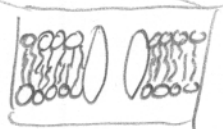
Fermi-See

Anwendungsbeispiel für Fermi-Verteilung

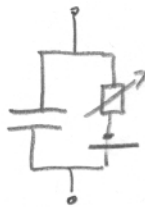


Membran ist das System (2D)

Flüssigkeit



aus Doppelschicht (amphiphiler Lipide) und Kanälen.



Trennt "innen" und "außen" $\Rightarrow$

chemische Gradienten: E_i , i Index Ionenart

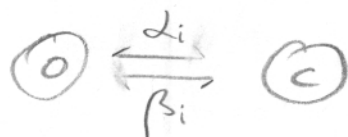
$$C \dot{V} = \frac{1}{R} (E_i - V) \quad V = \text{transmembran Potential}$$

$$\frac{1}{R} \equiv g(V) = \bar{g} \quad \text{Spannungsgesteuerte Leitfähigkeit}$$

Zustände der Kanäle: offen "O" oder geschlossen "C"

Ansatz $g(V) = g_{\max} p(V)^k$

Öffnungswahrscheinlichkeit $p(V)^k$



$$\dot{p}_i(V) = \alpha_i(V) (1 - p_i(V)) - \beta_i(V) p_i(V)$$

Stochastische Bewegungsgleichung
(master equation genannt)

die Ratekonstanten

$\alpha_i(V)$ und $\beta_i(V)$ sind der Form

$$\beta_h(V) = \frac{1}{e^{(30-V)/10} + 1} \quad \text{Fermi-Verteilung}$$

$$\alpha_h(V) = 0.07 e^{-V/20} \quad \text{Boltzmannverteilung}$$

h steht für die schnelle Inaktivierung des Natrium-Kanals