Transfermatrix

(insbesondere für externes mag Feld $H \neq 0$)

$$Z = \sum_{\sigma_1 \dots \sigma_N} e^{K\sigma_1\sigma_2} \, e^{K\sigma_2\sigma_3} \dots e^{K\sigma_N\sigma_1}$$

mit $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{1-1} \\ T_{-11} & T_{-1-1} \end{pmatrix} \qquad T_{\sigma\sigma'} = e^{K\sigma\sigma'}$

$$Z = \sum_{\sigma_1 \sigma_N} T_{\sigma_1\sigma_2} T_{\sigma_2\sigma_3} \dots T_{\sigma_N\sigma_1}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{C} \longleftrightarrow A_{ij} = \sum_k B_{ik} C_{kj} \qquad \text{und}$$

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{A}) = \sum_i A_{ii}$$

Schritt 1. Summe $\sum_{\sigma_2} \dots \sum_{\sigma_N}$ dann $\sum_{\sigma_1}$

$$Z = \sum_{\sigma_1} T^N_{\sigma_1\sigma_1} = \mathrm{Tr}(\mathbf{T}^N)$$

Da $\mathbf{T}$ real und symmetrisch $\begin{pmatrix} e^K & e^{-K} \\ e^{-K} & e^K \end{pmatrix}$

findet sich $\mathbf{S}$ mit $\mathbf{S}^T = \mathbf{S}^{-1}$, so daß

$$\mathbf{T}' = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{T} \mathbf{S} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

mit λ_1 und λ_2 Eigenwerte von $\mathbf{T}'$ und $\mathbf{T}$

somit $\left(\mathrm{Tr}(\mathbf{T}) = \mathrm{Tr}(\mathbf{T}') \right)$ gilt vgl. XV ⑧

$$Z = \mathrm{Tr}\left(\mathbf{T}^N\right) = \lambda_1^N + \lambda_2^N \qquad \left(= (2\cosh K)^N + (2\sinh K)^N \right)$$

Annahme $\lambda_1 \neq \lambda_2$ und oBdA $\lambda_1 > \lambda_2$

$$Z = \lambda_1^N \left(1 + \left[\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right]^N \right) \qquad \text{für } N \to \infty$$

$$Z \simeq \lambda_1^N$$

$$\det \begin{pmatrix} e^K - \lambda & e^{-K} \\ e^{-K} & e^K - \lambda \end{pmatrix} = 0 = (e^K - \lambda)^2 - e^{-2K}$$

$$\lambda = e^K \pm e^{-K} \quad \square \qquad \begin{matrix} + \equiv \cosh \\ - \equiv \sinh \end{matrix}$$

- im thermodyn. Limes ist nur der größte EW wichtig

$$\lim_{N\to\infty} \frac{F_N(K,T)}{N} = -k_B T \log \lambda_1$$

Wenn $-\beta H_\Omega = h \sum_i \sigma_i + K \sum_i \sigma_i \sigma_{i+1}$ mit $h \equiv \beta H$
vgl. $K \equiv \beta J$

$$\frac{F_N(h,K,T)}{N} = -k_B T \ln \left(e^K \left[\cosh h + \sqrt{\sinh^2 h + e^{-4K}} \right] \right)$$

$$= -J - k_B T \log \left(\cosh h + \sqrt{\sinh^2 h + e^{-4K}} \right)$$

allgemeines Resultat für 1D Ising mit externem Feld

- λ_1 nicht analytische Fkt von K und h
- $\lambda_1 = \lambda_2$ $\quad \sqrt{\ldots}$ verschwindet
- $\lambda_1 = 0$

Teil d. Satz von Perron-Frobenius

Für $N \times N$ Matrix $(n < \infty)$ **A** mit $A_{ij} > 0$
ist der größte EW

a) real und positiv
b) nicht degeneriert
c) eine analytische Funktion von A_{ij}

Transfermatrix für 1D-Problem 2×2

für kurzweitreichige Wechselwirkung ($\exists$ Limes)

- höheren Dimensionen ist Transfermatrix $\infty \times \infty$!
- Spezialfall $T = 0$?

Dualkopplung (Quantenmechanik)

- borgen wir uns die q.m. Notation

$|\sigma\rangle \quad |+1\rangle, |-1\rangle$

$\langle\sigma'|\sigma'\rangle = \delta_{\sigma\sigma'}$

$\sum_\sigma |\sigma\rangle\langle\sigma| = 1$

$\mathrm{Tr}\, A = \sum_\sigma \langle\sigma|A|\sigma\rangle$

$\Rightarrow \quad Z = \mathrm{Tr}(T^N)$ oo ☹

$e^{K\sigma\sigma'} = \langle\sigma|T|\sigma'\rangle$

Über Wick-Rotation Oha!

$\beta \leftrightarrow \frac{it}{\hbar}$

Wenn $T(t) = e^{i\mathcal{H}t}$

$Z(\beta) = \mathrm{Tr}\, T(i\beta) = \sum_\alpha e^{-\beta E_\alpha}$

QM und Stat Mec. verbunden

mit Pauli-Matrizen

$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} \langle +1|A|+1\rangle & \langle 1|A|-1\rangle \\ \langle -1|A|-1\rangle & \langle -1|A|+1\rangle \end{pmatrix}$

Beispiel σ hat als mögliche Werte die EW von τ_3, d.h. die Matrixelemente $\langle\sigma|\tau_3|\sigma'\rangle$ sind

0 für $\sigma \neq \sigma'$

σ " $\sigma = \sigma'$

$$\langle\sigma|1|\sigma'\rangle = \frac{1+\sigma\sigma'}{2} \qquad \langle\sigma|\tau_1|\sigma'\rangle = \frac{1-\sigma\sigma'}{2}$$

$$\langle\sigma|\tau_2|\sigma'\rangle = i\,\frac{\sigma-\sigma'}{2} \qquad \langle\sigma|\tau_3|\sigma'\rangle = \frac{\sigma+\sigma'}{2}$$

(Alternative Schreibweise mit δ - Symbol)

$$\langle\sigma|T|\sigma'\rangle = \frac{1+\sigma\sigma'}{2}e^{K} + \frac{1-\sigma\sigma'}{2}e^{-K}$$

$$T = e^{K}1 + e^{-K}\tau_1$$

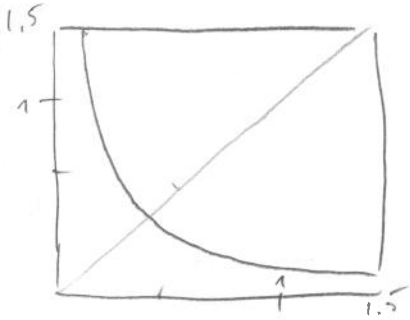
$$T = e^{-H}$$

$$-H = \underbrace{\tilde{K}_0}_{\text{konstanter Term im Hamiltonian}}\,1 + \tilde{K}\tau_1$$

$$2\tilde{K}_0 = \ln\frac{\sinh 2K}{2}$$

$$\tilde{K} = -\frac{\ln\tanh K}{2}$$

QM - Version von K



Symmetrische Form

$$(\sinh 2\tilde{K})(\sinh 2K) = 1$$

$$\tilde{K} = D(K) = -\frac{\ln\tanh K}{2}$$

Renormierungsgruppe (RG) - Kadanoffs Blockspin-Modell

$$Z = \sum_{\sigma_1 \dots \sigma_N} e^{K\sigma_1\sigma_2}\, e^{K\sigma_2\sigma_3}\, e^{K\sigma_3\sigma_4}\, e^{K\sigma_4\sigma_5} \dots$$

z.B.

Summe über σ_2 !

Statt den "Trick" von IV 8, systematisch: "some of sums"

$\leftarrow a \rightarrow$

$$\begin{array}{cccccc} \uparrow & \uparrow & \downarrow & \uparrow & \uparrow & \downarrow \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & \sigma_4 & \sigma_5 & \sigma_6 \end{array}$$

$\longleftarrow 2a = a' \longrightarrow$

$\times \qquad \times \qquad \times$

gerade Summen

$\mu_1 \qquad \mu_2 \qquad \mu_3$ neue Notation

$$e^{W(\sigma_1,\sigma_3)} = \sum_{\sigma_2 = \pm 1} e^{K\sigma_1\sigma_2 + K\sigma_2\sigma_3}$$

$$e^{W(\mu_1,\mu_2)} = \sum_{\sigma_2} e^{K(\mu_1\sigma_2 + \sigma_2\mu_3)}$$

$$= \text{const}\; e^{K'\mu_1\mu_2} \qquad (\mu_1 + \mu_2)$$

Mit der <u>neuen</u> Kopplung K' suchen wir auf das alte Problem auf einer andern Längenskala a'

$$a \rightarrow a' = 2a$$

2 Fälle (wg Symmetrie $W(\sigma,\sigma') = W(-\sigma,-\sigma')$)

$$e^{W(\mu,\mu')} = \begin{cases} e^{2K} + e^{-2K} & \mu = \mu' \\ 2 & \mu = -\mu' \end{cases}$$

oder

$$\left(e^{K'\mu\mu'} = (1+\mu\mu')\cosh 2K + (1-\mu\mu') \right)$$

$$e^{2K'} = \frac{e^{K'}}{e^{-K'}} = \frac{e^{2K}+e^{-2K}}{2}$$ Verhältnis von vorhen

$$\boxed{K' = \frac{1}{2}\ln\cosh 2K}$$

Fall $K \to \infty$

$$K'_\infty = \frac{1}{2}\ln\frac{e^{2K_\infty}}{2} = K_\infty - \frac{\ln 2}{2}$$

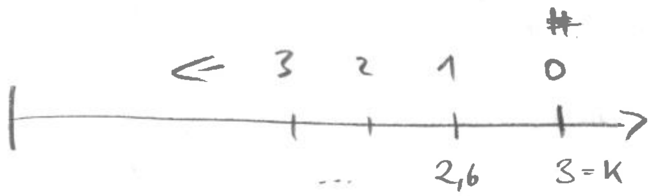
Fall $K \to 0$

$$K'_0 = 2K^2 \qquad \left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+e^{-2K}}{2} \right)$$

Korrelations länge

$$\xi = \frac{a}{\ln\left((\tanh K)^{-1}\right)}$$

$$\xi' = \frac{a'}{\ln\left((\tanh K')^{-1}\right)}$$



alle 1D Probleme „sehen von weitem" wie schwache Kopplung aus

1D Systeme haben keine Phasen!!!

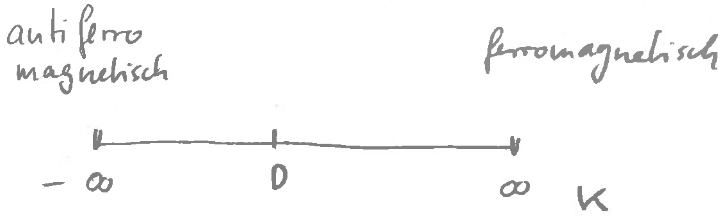
Renormierung mit Dualer Kopplung $\tilde{K}$

$$K' = \frac{1}{2} \ln \cosh 2K$$

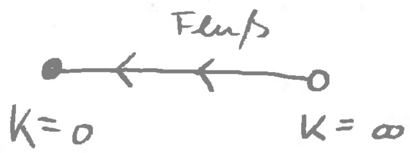
$$\tilde{K} = D(K) = -\frac{\ln \tanh K}{2}$$

$$\Rightarrow \quad D(K') = 2\,D(K) \quad \text{oder} \quad \tilde{K}' = 2\tilde{K}$$

Phasendiagramm



Renormierungstransformation verbindet Punkte im Phasendiagramm, die die selbe Phase haben!



das führt zu kritischen Phänomenen! Kenneth G. Wilson
1982 Nobel Preis

Warnung: RG nach Kadanoff