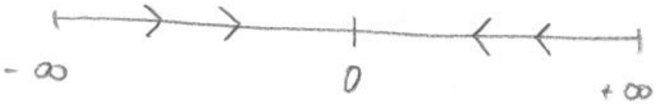
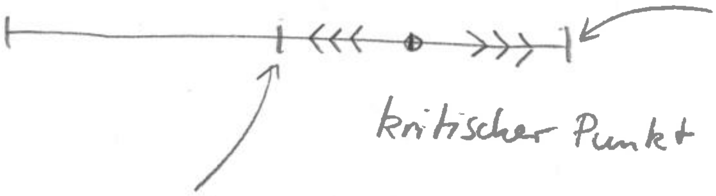
Dualität schwacher und starker Kopplung

RG



1D

2D



ferromagnetisch
strong coupling fixed point

kritischer Punkt

weak coupling fixed point

paramagnetisch

<u>Rudolf Peierls</u>

Beweis $\exists$ kritischer Punkt

Zunächst "bogus argument"
Symmetrie durch alle
$\sigma \to -\sigma$
unendlich große Systeme →
Wahrscheinlichkeit für
Übergang = 0
"diamonds are forever"

Kramers-Wannier   <u>Idee folgt hier</u>

Warum nicht Onsager's <u>Kraftakt</u> ?
Eben deswegen.

Analytische Lösung aber
wichtig um Näherungsmethoden zu testen.

Testen ?

...

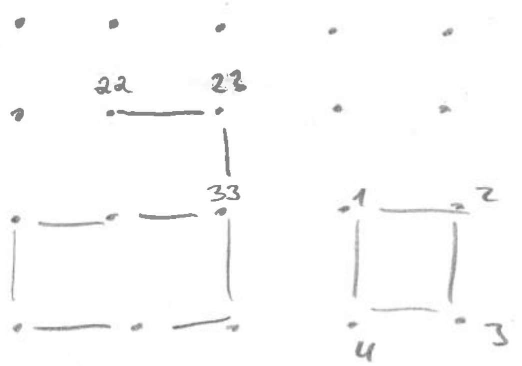
Hochtemperaturentwicklung

$K = \beta J$

$$Z = \sum_{\sigma_1 \dots \sigma_z} \prod_{N.N.} \underbrace{\cosh K \,(1 + \sigma\sigma' \tanh K)}_{e^{K\sigma\sigma'}}$$

vgl. XV ⑧ Gl. (6)

(Nächste Nachbarn N.N.)



$\langle \sigma_{22}\sigma_{23} \tanh K \rangle = 0$

$\langle \sigma_{22}\sigma_{23} \tanh^2 K\, \sigma_{23}\sigma_{3} \rangle = 0$

....

$\langle \sigma_1^2 \sigma_2^2 (\tanh^4 K) \sigma_3^2 \sigma_4^2 \rangle = \tanh^4 K$

neu, da 2D!

$$\frac{\ln Z}{N} = \ln 2 + \ln(\cosh^2 K) + a_4 \tanh^4 K + a_6 \tanh^6 K + a_8 \tanh^8 K \dots$$

2^N # Zustände

Entwicklung in $(\tanh K)$ für K klein

Entwicklung

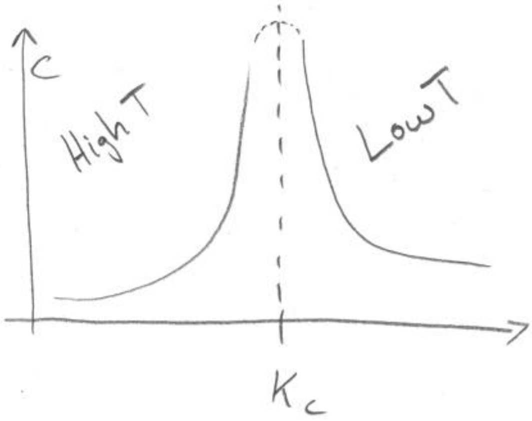
$a_4 = 1$ da es N Möglichkeiten gibt  in einen Gitter mit N Spins zu positionieren

$a_6 = 2$  2 Möglichkeiten

Man "kann" sich überzeugen dass Z divergiert für ein K_c

Entwicklungen symmetrisch & divergieren!

$\frac{\partial^2}{\partial K^2} f_b$



$\frac{\partial f_b}{\partial K}$ ~ mittlere Energie

Vergleiche $\tilde{K} = D(K)$ XVII ④ dual coupling

In Wahl geeigneter Einheiten ⇒

Curie-Temperatur

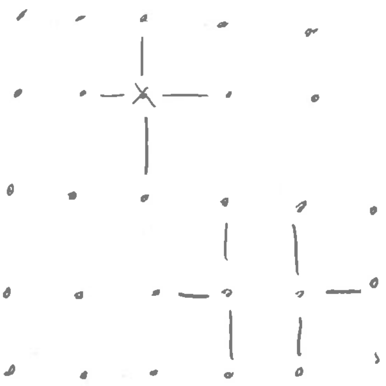
$K \sim \frac{1}{T}$

$$E = -\frac{\partial \log Z}{\partial \beta}$$

$$F = -\frac{\log Z}{\beta}$$

vgl. V ④

Tieftemperaturentwicklung (K groß)



$$Z = \sum_{\sigma_1 \ldots \sigma_N} \prod_{N.N.} e^{K\sigma\sigma'}$$

$$e^{K\sigma\sigma'} = e^{K} \left(\frac{1+\sigma\sigma'}{2} + \underbrace{\frac{1-\sigma\sigma'}{2} e^{-2K}}_{\text{Korrektur wenn } \sigma \neq \sigma'} \right)$$

$$\frac{\ln Z}{N} = 2K \langle \ldots \rangle$$

2^N Bindungen / Zustände

e^K

$$\langle \ldots \rangle = b_4 \left(e^{-2K}\right)^4 + b_6 \left(e^{-2K}\right)^6 + b_8 \left(e^{-2K}\right)^8$$

Kramers-Wannier Dualität $a_i = b_i$!

Tieftemperaturentwicklung (Alternativer störungstheoretischer Ansatz)

$$-\beta H = K \sum_{N.N.} \sigma\sigma'$$

Lernziel? · Fallstricke · Hexenkunst & · Erbsenzählen

kein Lernziel: vollständiges Fallbeispiel

Bei $T = 0$ Grundzustand

$$\begin{matrix} \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\ \uparrow \\ \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\ \uparrow \end{matrix}$$

Störungstheorie in Variable l: Anzahl der gekippten Spins

Es sei Dimension d und Koordinationszahl $z = 2d$ (Anzahl nächster Nachbarn)

Für $T > 0$

$l \in \{1, 2, \ldots, k, \ldots\}$ Entartung sei g_K

Grundzustand

$$E = E_0 = -\frac{KNz}{2\beta} = -\frac{JNz}{2}$$

$$g_0 = 1$$

Ein Spin gekippt

$$E_1 = E_0 + 2Jz$$

$$g_1 = N$$

Zwei Spins gekippt

(a) Nachbarn

$$\begin{array}{c} \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow \\ \uparrow\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow \\ \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow \end{array}$$

$$E_{2a} = E_0 + 2J(2z-2)$$

$$g_{2a} = \frac{Nz}{2!}$$

(b) keine Nachbarn

$$E_{2a} = E_0 + 2J(2z)$$

$$g_{2b} = \binom{N}{2} - dN = \frac{(N\cdot(N-1)) - 2dN}{1\cdot 2} = \frac{N(N-1-2d)}{2}$$

Drei Spins ... Halt!

$$Z = g_0 e^{-\beta E_0} + g_1 e^{-\beta E_1} + g_2 e^{-\beta E_2} + \dots$$

$$= e^{NKd}\left(\underbrace{1}_{0} + \underbrace{Ne^{-4Kd}}_{1} + \underbrace{Nd\, e^{-4K(2d-1)}}_{2a} + \underbrace{\frac{N(N-1-2d)}{2} e^{-8Kd}}_{2b} \dots\right)$$

mit $W = e^{-2K}$ bzw $W^2 = e^{-4K}$ Freie Energie

$$F = -k_B T \ln Z$$

$$= -dJN - k_B T \ln\left[1 + N(W^2)^d + dN(W^2)^{2d-1} + \frac{N(N-1-2d)}{2}(W^2)^{2d} + \dots\right]$$

$$F = -\alpha J N - k_B T \ln \left(1 + \sum_k B_k \right)$$

$$B_1 = N (\omega^2)^\alpha$$

$$B_2 = \alpha N (\omega^2)^{2\alpha - 1} + \frac{N(N-1-2\alpha)}{2} (\omega^2)^{2\alpha}$$

Für $\alpha > 1$

$$B_{k-1} \gg B_k$$

Abbrechen

$$\ln(1+\varepsilon) = \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^3}{3} - \dots$$

In zweiter Ordnung

$$\ln \left(1 + \sum_k B_k \right) \approx B_1 + B_2 - \frac{1}{2} B_1^2 =$$

B_2 ist $\mathcal{O}(B_1^2)$ nur für $\alpha > 1$

$$N(\omega^2)^\alpha + \alpha N (\omega^2)^{2\alpha-1} + \frac{N^2}{2} (\omega^2)^{2\alpha} - \frac{N}{2} (\omega^2)^{2\alpha} - \alpha N (\omega^2)^{2\alpha} - \frac{N^2}{2} (\omega^2)^{2\alpha}$$

$$= N \left[\omega^{2\alpha} + \alpha (\omega^2)^{2\alpha - 1} - \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) (\omega^2)^{2\alpha} \right]$$

N^2 fallen weg F ist extensive Größe!

$$f_b = -\alpha J - \frac{1}{\beta} \left(\omega^{2\alpha} + \alpha (\omega^2)^{2\alpha-1} - \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) (\omega^2)^{2\alpha} \right).$$

Oha

Für $d=1$

Wissen wir schon aus XVII ③

$$f_b = -k_B T \ln\left(e^{K} + e^{-K}\right)$$
$$= -k_B T \ln e^{K}\left(1 + e^{-2K}\right)$$
$$= -J - k_B T \ln\left(1 + e^{-2K}\right)$$
$$= -J - k_B T e^{-2K} + \dots$$

vgl. mit ⊗ Seite zuvor

$K = \frac{J}{k_B T}$ ← Temperatur!

$$f_b = -J - k_B T\left(e^{-4K} + e^{-4K} + \frac{3}{2} e^{-4K}\right)$$

oups?

Limes $T \to 0$ und Limes $N \to \infty$ darf man nicht vertauschen!

N: endlich

$$Z_N = (2\cosh K)^N + (2\sinh K)^N$$
$$= e^{NK}\left[\left(1+e^{-2K}\right)^N + \left(1-e^{-2K}\right)^N\right]$$

$$F_N = -NJ - k_B T N^2 e^{-4K} + \mathcal{O}\left(\left(N^2 e^{-4K}\right)^2\right)$$

...