

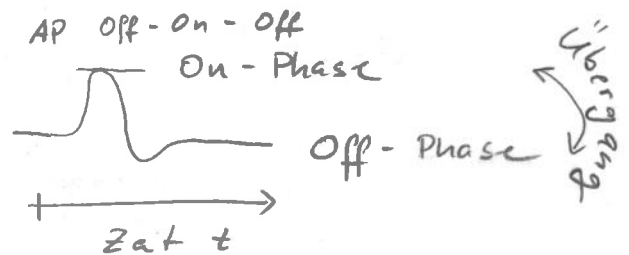
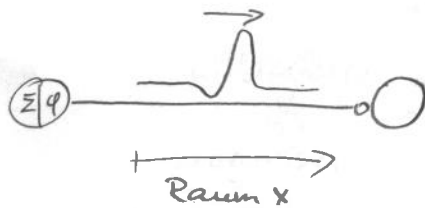
Nichtgleichgewichts-Phasenübergänge

(aus der Physik kommend (Onsager Reziprozitätsbeziehungen))

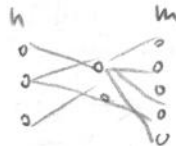
- Synergetik (Haken); Dissipative Strukturen (Prigogine)
- Verzweigungstheorie (Nicht-lineare Dynamik)
- Katastrophentheorie (Differentialgeometrie)

Skript XV Phasenübergängeab " XX Neurowissenschaften

AP: Aktionspotentiale (Dissipative Struktur)



Netzwerke

Abbildung $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$m \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \dots & \dots & \end{bmatrix} \begin{matrix} n \\ m \times n \end{matrix}$$

Nebenbemerkung: • künstliche ^{neuronale} Netzwerke: Data mining• nichtlineare ^{neuronale} Dynamik auf Netzwerken: Data assimilation

lineare dynamische System

XXII

①

$$\dot{x} = a x$$

$$x(t) = x(0) e^{at}$$

1D (eine abhängige Variable)

$$\underline{\dot{x}} = A \underline{x}$$

allgemeiner Fall

$$\underline{x}(t) = \underline{x}(0) e^{tA}$$

Überladen der Notation

(nicht alles überträgt sich!)

Laplace-Transformation (s. Anhang A1)

$$s \bar{X}(s) - x(0) = A \bar{X}(s)$$

$$(sI - A) \bar{X}(s) = x(0)$$

$$\bar{X}(s) = \underbrace{(sI - A)^{-1}}_{\uparrow \text{Resolvente}} x(0)$$

Bedingung
invertierbar

Rücktransformation

$$x(t) = \underbrace{\mathcal{L}^{-1}((sI - A)^{-1})}_{\Phi(t)} x(0)$$

Zustandsübergangsmatrix

(state transition matrix)

Matrixwertige Funktion der Zeit t

Zu jeder Zeit t ist der Zustand eine lineare Funktion von $x(0)$

Beispiel: Harmonischer Oszillator

(2)

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Standardform linearer ODEs

• bitte umdenken!

$$\omega_0 = 1, \quad \begin{matrix} x = x_1 \\ \dot{x} = x_2 \end{matrix}$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underset{x \uparrow}{x}$$

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} X$$

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2+1} & \frac{1}{s^2+1} \\ \frac{-1}{s^2+1} & \frac{s}{s^2+1} \end{bmatrix}$$

„Regel“

$$\begin{bmatrix} \nearrow & - \\ - & \nearrow \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\det}$$

$t, f(t), f'(t), f''(t), \dots$

$f(t) \equiv x$, immer erster
Ordnung, sonst Substitution

$$\dot{x}_1 = x_2$$

Lineare Standardform

$$a(t) \dot{x}(t) + b(t) x(t) = c(t)$$

$$\dot{x}(t) + p(t) x(t) = q(t)$$

nicht so in nichtlinearer
Dynamik, Kontrolltheorie
oder Physiologie

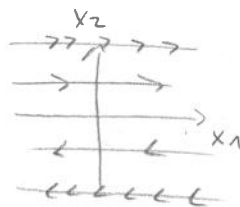
$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}([::]) = \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} x(0)$$

Beispiel: Zweifacher Integrator

Fluss im Phasenraum

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$(sI - A)^{-1} = \begin{pmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ 0 & \frac{1}{s} \end{pmatrix}$$

(Eigenwert 0)

$$\Phi = \mathcal{L}^{-1} \left(\begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X(0)$$

lineares Wachstum!

$$x_1(t) = x_1(0) + t x_2(0)$$

$$x_2(t) = x_2(0)$$

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \text{Spalte} \\ \text{Trajektorie, wenn } X(0) = e_i \end{pmatrix}$$

State transition matrix

Interpretation

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \text{Zeile} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \text{kein Einfluss} & \text{großer Einfluss} \\ 0 & 0 & -1 & 30 & 17 \end{pmatrix} \text{ etc}$$

Zur Zeit t!

Was bedeutet eine Matrix als Exponent?

④

Betrachte

$$(I - C)^{-1} = I + C + C^2 + C^3 + \dots$$

$e^{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}$?
 $\neq \begin{bmatrix} e & e \\ e^2 & 1 \end{bmatrix}!$
vgl. Komponentenweise vs. Überladung!

konvergiert für C klein

(EW klein)

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s} \left(I - \frac{A}{s} \right)^{-1} = \frac{I}{s} + \frac{A}{s^2} + \frac{A^2}{s^3} + \dots$$

(nur für $|s|$ groß!)

$$\phi(t) = \mathcal{L}^{-1}((sI - A)^{-1}) = I + tA + \frac{(tA)^2}{2!} + \dots$$

Haha!

Somit Definieren wir $e^M = I + M + \frac{M^2}{2!} + \dots$

$$\phi(t) = \mathcal{L}^{-1}((sI - A)^{-1}) = e^{tA}$$

Beispiel Liebesbeziehungen nach Strogatz

5

$$\begin{array}{l} \text{Romeo} \quad \dot{R} = aR + bJ \\ \text{Julia} \quad \dot{J} = cR + dJ \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \dot{R} \\ \dot{J} \end{array}} \right\} \dot{x} = Ax$$

4 romantische Stile

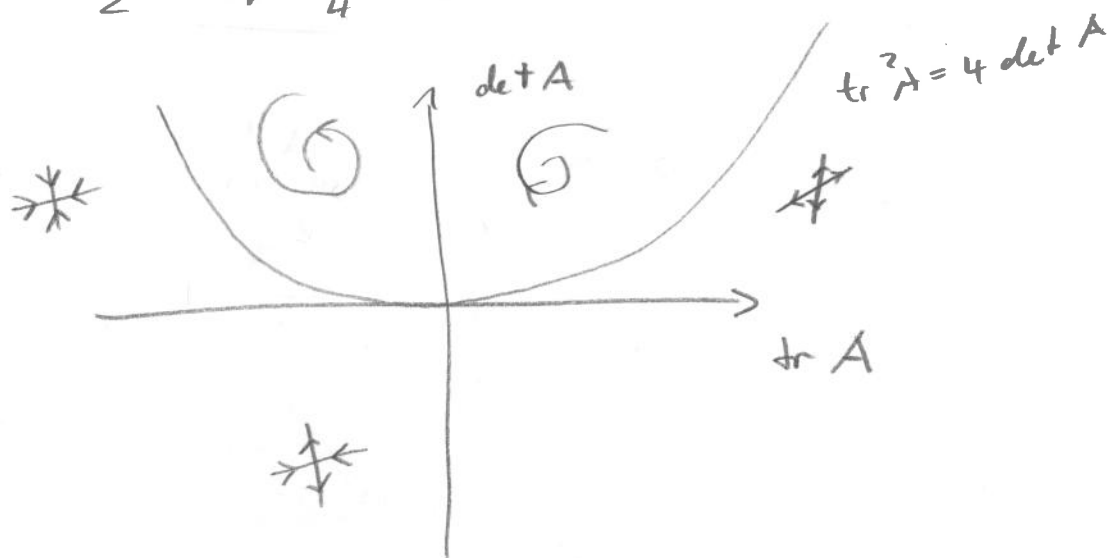
$a > 0, b > 0$	eager beaver (Streber)
$a > 0, b < 0$	narcissistic nerd (selbstverliebt)
$a < 0, b > 0$	cautious (or secure) lover (Verhalten)
$a < 0, b < 0$	hermit (Einsiedler)

Jeder kennt den harmonischen Oszillator!

Charakteristische Gleichung

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad \text{mit } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{\text{tr} A}{2} \pm \sqrt{\frac{(\text{tr} A)^2}{4} - \det A}$$



Laplace-Transformation einer Matrixwertigen Funktion

$$z: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{p \times q}$$

$$Z = \mathcal{L}(z)$$

$$Z: D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{p \times q}$$

$$Z(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} z(t) dt$$

↑
überladen: komponentenweise

$$\mathcal{L}(\dot{z}) = s Z(s) - z(0)$$

denn

$$= \int_0^{\infty} e^{-st} \dot{z}(t) dt$$

partielle Integration

$$\int uv' dx = uv - \int vu' dx$$

$$= e^{-st} z(t) \Big|_{t=0}^{t=\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st} z(t) dt$$

□

Weitere Beispiele

A2

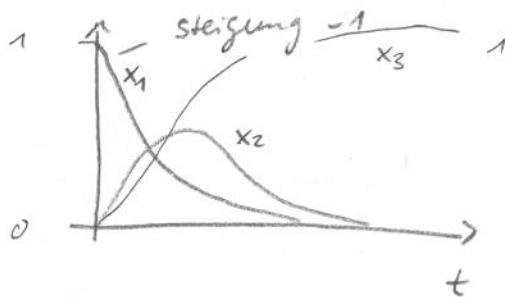


$$\dot{A} = \dot{x}_1 = -k_1 x_1$$

...

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 & 0 \\ k_1 & -k_2 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \end{bmatrix} X$$

Spaltensumme = 0 ! Erhaltungsgröße



$$x(0) = (1, 0, 0)$$

$$k_1 = k_2 = 1$$

- typische Pharmakokinetische Modelle
- Chemische Systeme
- Ökonomie

Diskrete Zeit

$$X(t+1) = A X(t)$$

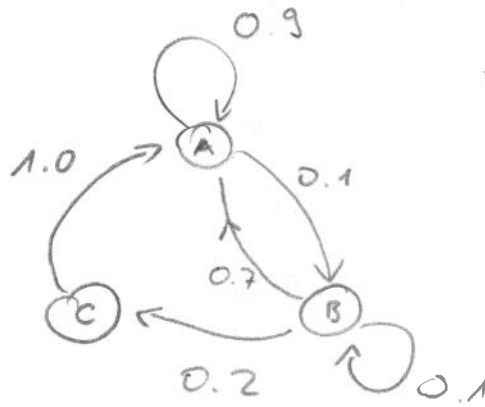
$$X(t) = A^t x(0)$$

↙ mögliche Zustände

$$X(t) \in \{1, \dots, n\}, \quad X(t) \text{ zufällige Sequenz}$$

$$P(X(t+1)=i \mid X(t)=j) = P_{ij}$$

Markov - Kette



A = System OK

B = System "down"

C = Reparatur

$$p(t+1) = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.7 & 1.0 \\ 0.1 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \end{bmatrix} p(t)$$

Langeitverhalten $\begin{pmatrix} 0.88 \\ 0.10 \\ 0.02 \end{pmatrix}$

Vorwärts Eulern

$$\dot{x} = A x, \quad x(0) = x_0$$

$$x(t+h) \approx x(t) + h \dot{x}(t) = (I + hA) x(t)$$

$$x(kh) = (I + hA)^k x(0)$$

vgl. ④ !

Achtung: Fortsetzung

ist eingefügt aus einem
älteren Skript. Seitennummerierung
läuft nun von ④ neu an!

3.2 Nichtlineare Systeme

$$\dot{u} = f(u, \mu) \quad u \in \mathbb{R}^n \quad \mu \in \mathbb{R}^p \quad (\text{hier } p=1)$$

f ist C^r -Funktion $r \geq 5$ soll reichen

Fixpunktbedingung $f(u^*, \mu_0) = 0$

$$\delta u = u - u^*$$

$$\dot{\delta u} = J_f(u^*) \delta u \quad \left(\begin{array}{l} \dot{x} = Ax \end{array} \right)$$

Nach einem von Hartman und Grobman bewiesenen Satz kann für den Fall, dass kein EW von $J_f(u^*)$ verschwindet oder rein imaginär ist, die Klassifikation der singulären Punkte des nichtlinearen Systems anhand des linearisierten Systems durchgeführt werden.

Ein singulärer Punkt u^* , für den die EW der der zugehörigen Jakobi-Matrix $J_f(u^*)$ nichtverschwindenden Realteil besitzen, heißt ein hyperbolischer Fixpunkt.

(nicht degeneriert)

3.3. Invariante Mannigfaltigkeiten

~~3.3.1~~ $\dot{x} = Ax$

3.3.1 lineare Systeme Eigenräume

$$E^s = \text{span} \{ e_1, \dots, e_s \}$$

EV mit EW $\text{Re}(\lambda_i) < 0$

$$E^u = \text{span} \{ e_{s+1}, \dots, e_{s+u} \}$$

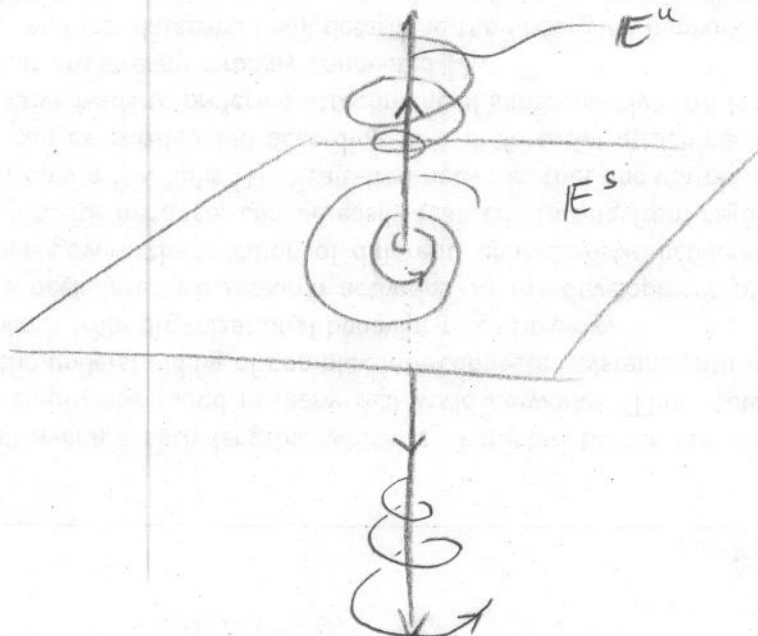
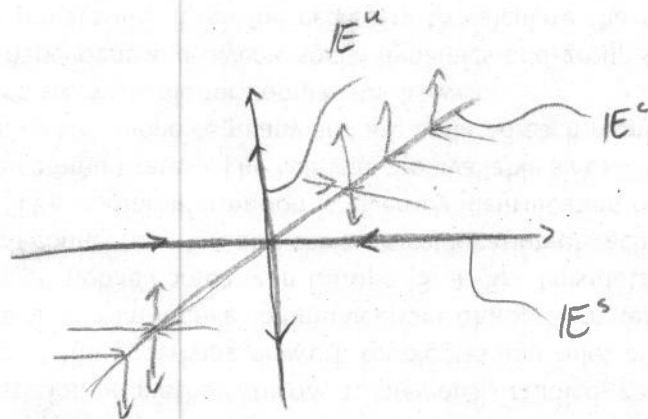
EV mit EW $\text{Re}(\lambda_i) > 0$

$$E^c = \text{span} \{ e_{s+u+1}, \dots, e_{s+u+c} \}$$

EV mit EW $\text{Re}(\lambda) = 0$

$$s + u + c = n$$

Beispiel



b)

6

3.3.12 Nichtlineare Systeme 3.3.2 "lausibel machen"

Beispiel

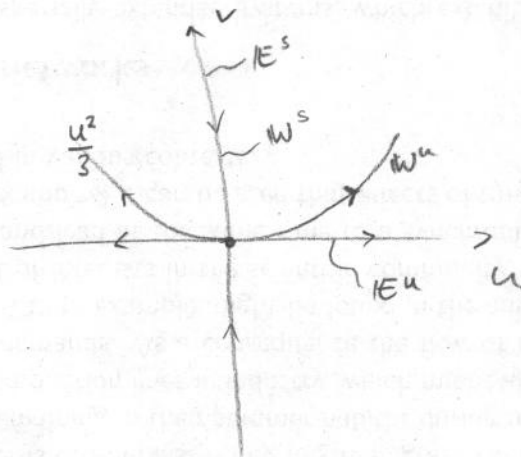
$$\dot{u} = u$$

$$\dot{v} = -v + u^2$$

Eliminieren der Zeit

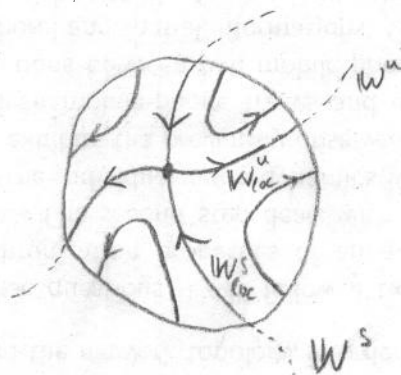
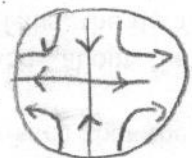
$$\frac{dv}{du} = -\frac{v}{u} + u$$

$$v(u) = \frac{u^2}{3} + \frac{C}{u}$$

Fixpunkt $C=0$ 

Nach Hartman und Grobman $\Rightarrow$ topologische Äquivalenz
(vgl. 3.2) der Flüsse

Allgemein

H+G
lokal

3.3.3 Zentrumsmannigfaltigkeit

Entsprechend dem invarianten Unterraum E^c heißt das nichtlineare Analogon W^c Zentrumsmannigfaltigkeit.

W^c spannt den in den Eigenwerten mit Realteil gleich Null gehörigen Eigenraum E^c .

Beispiel

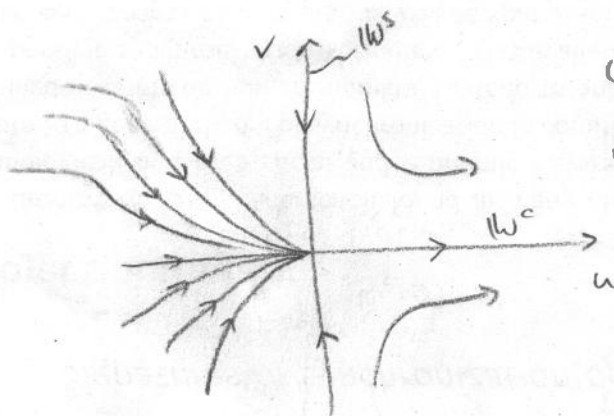
$$\begin{aligned}\dot{u} &= u^2 \\ \dot{v} &= -v\end{aligned}$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{-v}{u^2} \cdot \alpha$$

$$V(u) = \left(\frac{1}{2} u_0^2 e^{-\frac{2}{u_0} u} \right) e^{\frac{1}{u_0} u}$$

$$u(t) = \frac{u_0}{1 - u_0 t} \Rightarrow t = \frac{u - u_0}{u \cdot u_0}$$

$$v(t) = v_0 e^{-t}$$



$$W_\alpha^c(0) = \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid v = \alpha e^{\frac{1}{u_0} u} \text{ für } u < 0, v = 0 \text{ für } u \geq 0 \right\}$$

Die stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten sind eindeutig, für W^c gilt das nicht unbedingt. $\textcircled{*}$

Lokal am Fixpunkt seien x, y, z "Mannigfaltigkeitskoordinaten", krummlinige Koordinaten die W^c , W^s und W^u zugeordnet seien

(7a)

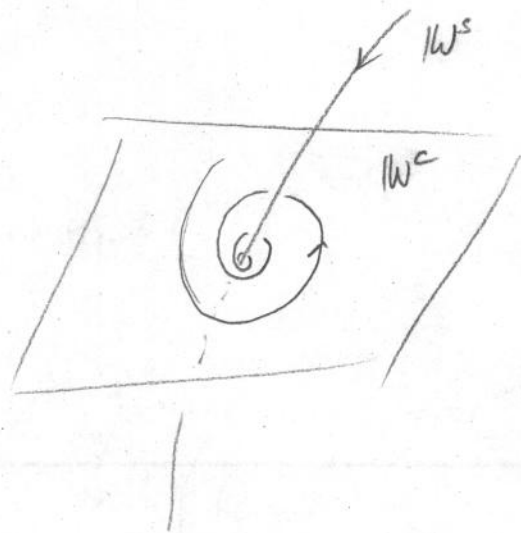
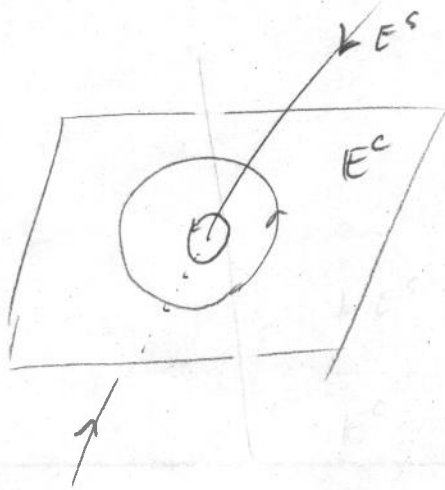
So gilt das am singulären Punkt $\dot{\underline{u}} = f(\underline{u})$ ($\underline{u} \in \mathbb{R}^3$)

$$\dot{x} = \bar{f}(x)$$

$$\dot{y} = -y$$

$$\dot{z} = z$$

(*)



Um zu unterscheiden ob der Fluss auf W^c zum singulären Punkt hin- oder von ihm wegstrebt, sind die Terme höherer Ordnung einzubeziehen.

3.4. Stabilitätswechsel

1

Das Konzept der "Dynamischen Krankheit" beruht auf der Idee, dass ein physiologischer Zustand (stabiler Fixpunkt) seine Stabilität verliert und in einen instabilen Zustand wechselt.

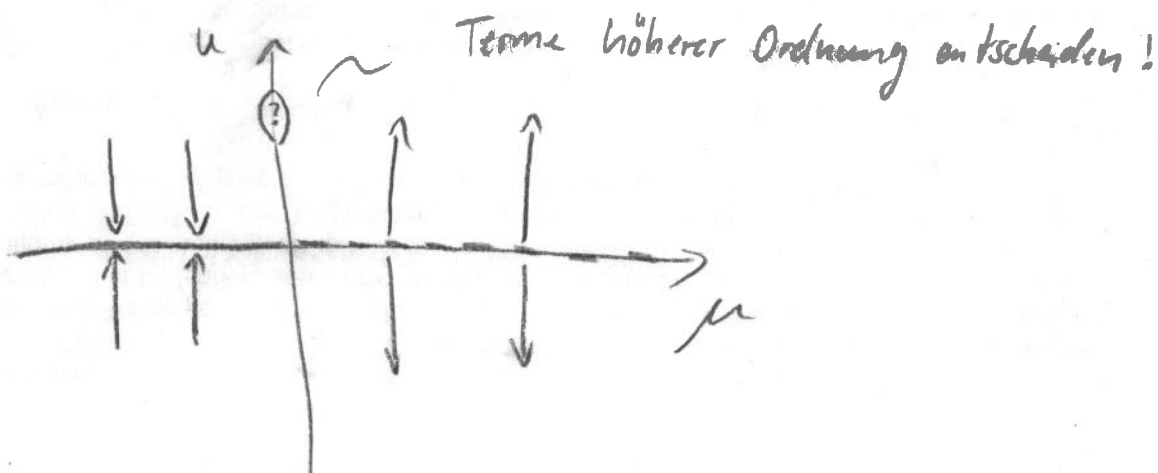
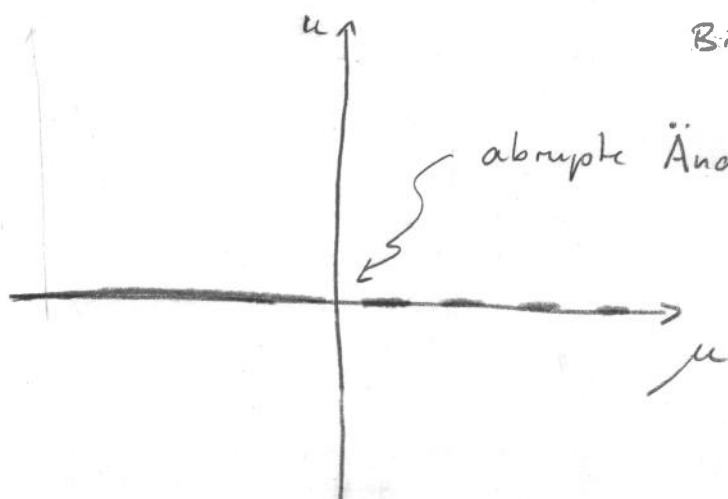
Wohin strebt dann das physiologische System, was charakterisiert den pathophysiologischen Zustand?

Einfaches Beispiel für $\dot{u} = f(u, \mu)$

$$\dot{u} = \mu u$$

$$u^* = 0 \quad \text{Fixpunkt}$$
$$\mu \quad \text{EW}$$

Bifurkationsdiagramm



höchst höhere Ordnung ist ein quadratischer Term

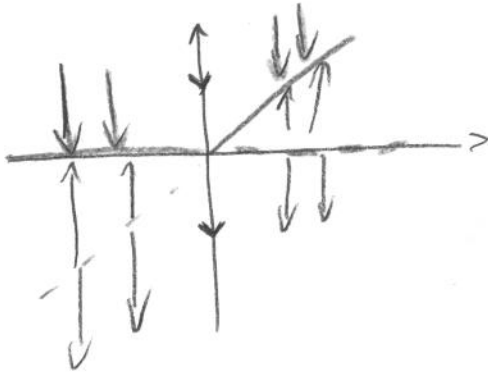
2

$$\dot{u} = \mu u - u^2$$

$$t \rightarrow -\tilde{t} \quad \mu \rightarrow -\tilde{\mu}$$

$$-\dot{u} = -\tilde{\mu} - u^2$$

$$\frac{d}{d\tilde{t}} \tilde{u} = \tilde{\mu} + u^2$$



$$u_1^* = 0 \quad \text{EW: } \mu$$

$$u_2^* = \mu \quad \text{EW: } -\mu$$

wo stabil? linearisieren um Fixpunkt

$$\text{EW } \mu - 2\mu = -\mu$$

(3)

3.5 Bifurkationen von Fixpunkten in Flüssen

$$\dot{y} = f(y, \mu) \quad f(y_0, \mu_0) = 0 \quad \text{Fixpunkt genau}$$

Annahme: Diff $f(y_0, \mu)$ hat einen EW gleich Null

Wie ist die Orbitstruktur beim Stabilitätswechsel?

Wird bestimmt durch die assoziierte Zentrumsmannigfaltigkeitsgleichung: (3.3.3)

← ohne Semikolon !!!

$$\dot{x} = f(x, \mu)$$

für die gilt

$$f(0, 0) = 0$$

Fixpunktbedingung

$$\frac{\partial}{\partial x} f(0, 0) = 0$$

Eigenwert gleich Null

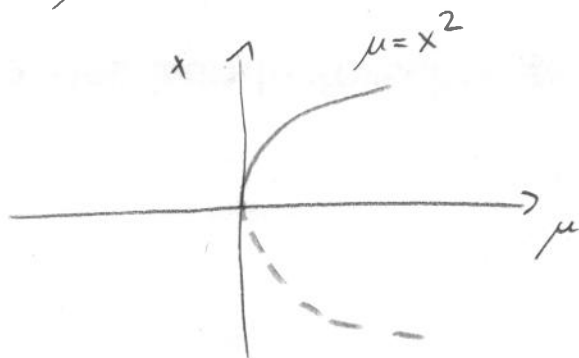
3.5.1. Sattel-Knoten-Bifurkation

$$\dot{x} = \mu - x^2$$

↙ Vorzeichenwechsel?

$$x_{1/2}^* = \pm \sqrt{\mu}$$

$$\lambda_{\pm} = \mp 2\sqrt{\mu}$$

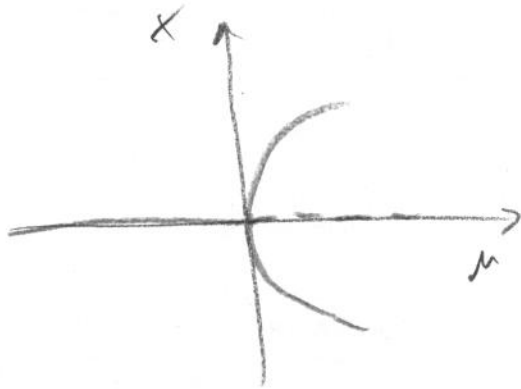


3.5.2 Transkritische Bifurkation

(4)

S. 3.4, $\dot{x} = \mu x - x^2$ (" + x^2 ")
Fall s. vorm)

3.5.3 Pitchfork Bifurkation



$$\dot{x} = \mu x - x^3$$

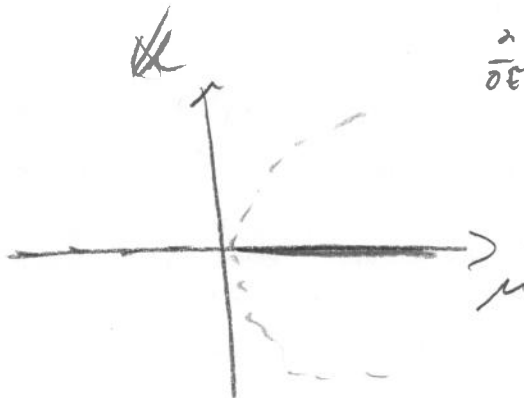
FP und EW
→ selber ausrechnen

$$\dot{x} = \mu x + x^3$$

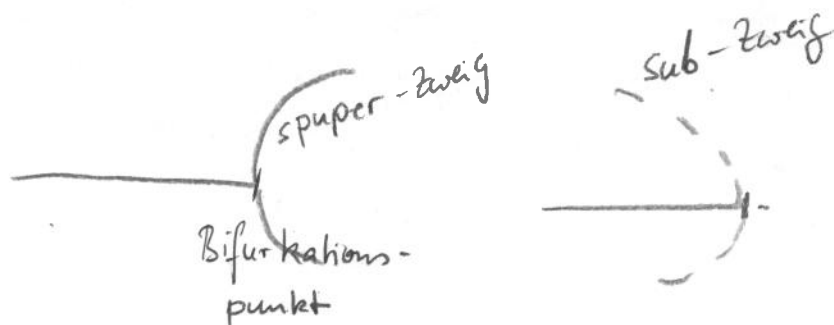
$$t \rightarrow -\tilde{t} \quad \mu \rightarrow -\tilde{\mu}$$

$$\frac{d}{d\tilde{t}} \tilde{x} = -\tilde{\mu} \tilde{x} - \tilde{x}^3$$

$$\frac{d}{d\tilde{t}} \tilde{x} = \mu \tilde{x} + \tilde{x}^3$$



supkritische Pitchfork Bif



3. Stabilität und Verzweigung (Fortsetzung)

3.5. Bifurkationen von Fixpunkten in Flüssen (Fortsetzung)

3.5.3 Pitchfork Bifurkation (Erinnerung)

$$\dot{x} = \mu x - x^3$$

Zur Erinnerung 3.3.3

Zentrumsmanigfaltigkeitsgleichung

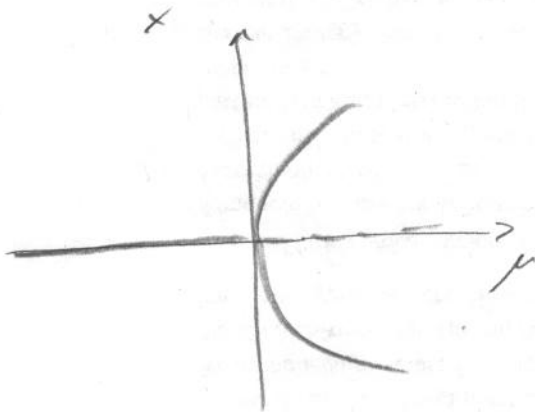
$$\underline{\dot{u}} = \underline{f}(\underline{u}) \Rightarrow$$

$$\underline{\dot{x}} = \underline{f}(\underline{x})$$

$$\dot{y} = -y \quad \text{stabil}$$

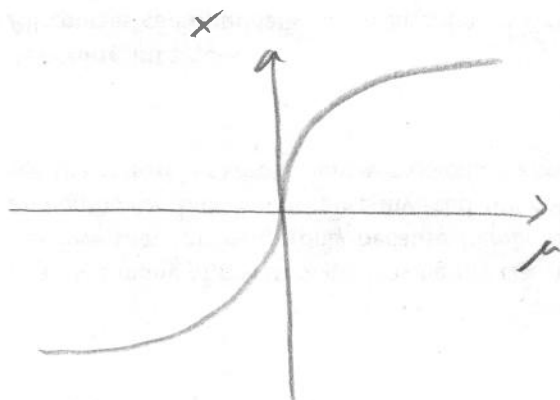
$$\dot{z} = z \quad \text{instabil}$$

$$(z, B. \quad t \rightarrow -\tilde{t} \\ \mu \rightarrow -\tilde{\mu})$$



3.5.4. Keine Bifurkation

$$\dot{x} = \mu - x^3$$

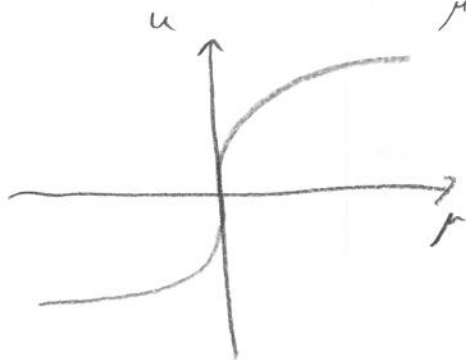


$$f(0,0) = 0 \quad \text{FP}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(0,0) = 0 \quad \text{EW nicht} \\ \text{hyperbolisch}$$

3.5.4

$$\dot{x} = \mu - x^3$$



$$\mu = x^3$$

$$x = \sqrt[3]{\mu}$$

$$-3x^2 \Big|_{\sqrt[3]{\mu}}$$

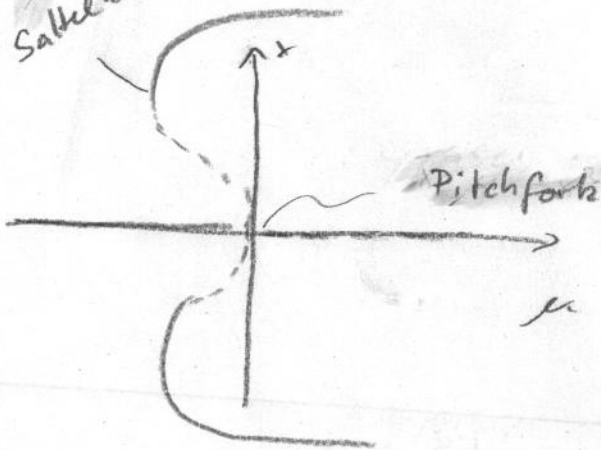
$$-3\mu^{\frac{2}{3}}$$

3.5.5

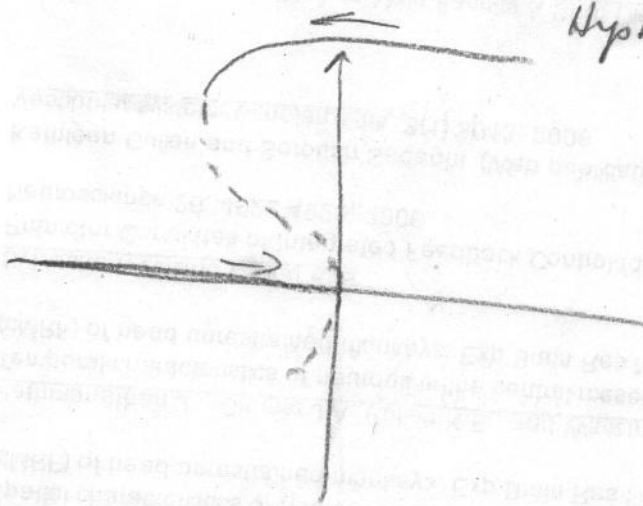
Typische Verbindungen

Ann
(Beispiele)

Sattelknoten

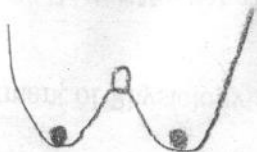
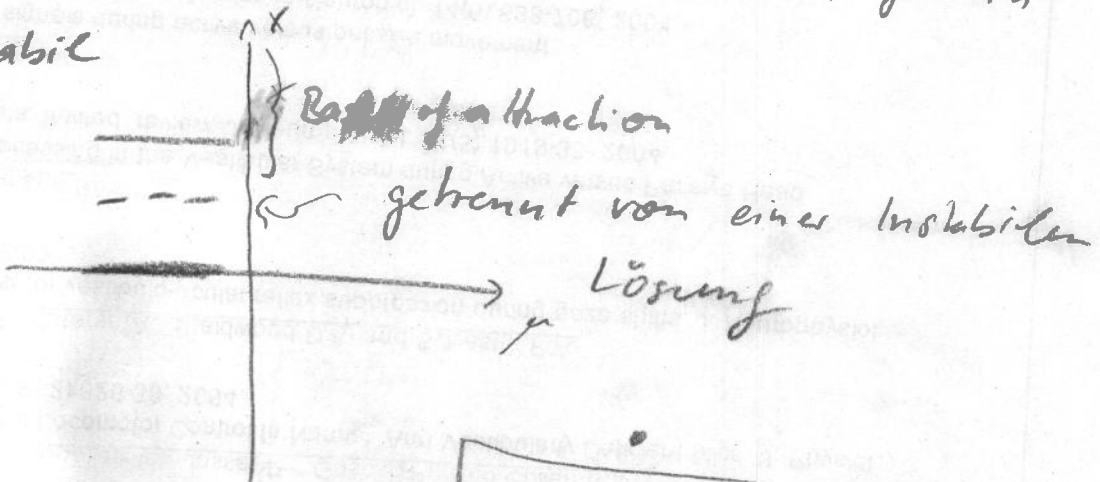


Hysteresis

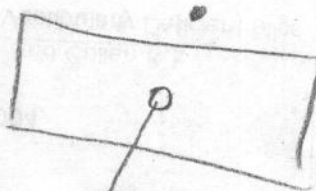


Multistabilität (allgemein)

Bistabil



Schwellenwert Störungen



Instabile Mannigf. ist

Metastabile Verbindung

Stabile ist die Spontanz