Bifurkationen

Lösungen "verzweigen"

geht einher mit Stabilitätswechsel, allerdings wird auch die Frage nach Stabilität der Verzweigung aufkommen

Bifurkationen von Fixpunkten in Flüssen

$$\dot u = f(u;\mu) \qquad f(u^*,\mu_c) = 0 \quad \text{Fixpunkt.}$$

Man kann Mannigfaltigkeitskoordinaten x, y, z lokal am Fixpunkt einführen durch krummlinige Koordinatentransformationen

Beispiel:

$$\dot u_1 = \lambda_1 u$$
$$u_2 = \lambda_2 u_2 + a u_1^3$$

Transformation

$$u_1 = y_1$$
$$u_2 = y_2 + \frac{a}{3\lambda_1-\lambda_2} y_1^3$$

$$\dot y_1 = \lambda_1 y_1$$

$$\dot y_2 + \frac{a}{3\lambda_1-\lambda_2} 3 y_1^2 \dot y_1 = \lambda_2 \left(y_2 + \frac{a}{3\lambda_1-\lambda_2} y_1^3 \right) + a y_1^3$$

$$\dot y_2 = \frac{-3a\lambda_1}{3\lambda_1-\lambda_2} y_1^3 + \underbrace{\left(\frac{a\lambda_2}{3\lambda_1-\lambda_2} + a \right)}_{\frac{3a\lambda_1}{3\lambda_1-\lambda_2} y^3} y_1^3 + \lambda_2 y_2$$

$+$

$= 0$

$$\dot y_2 = \lambda_2 y_2$$

Technik nichtlineare ODEs durch nichtlineare Koordinaten-transformation in ihre "einfachste Form" zu bringen ohne Lösungscharakter zu verändern: Normalformtheorie

Allgemein: $\dot{u} = f(u)$

1. Schritt $v = u - u^*$ Verschiebung in FP

$$\dot{v} = f(v + u^*) \equiv g(v)$$

2. Schritt Abspalten lin. Anteil

$$\dot{v} = J_g(0)\, v + \bar{g}(v) \qquad \bar{g}(v) = g(v) - J_g(0) v$$

3. Schritt Jordansche Normalform

Sei T Matrix die $J_g(0)$ in Jo.NF bringt $J = T^{-1} J_g(0) T$

$$v = T x$$

$$\dot{x} = J x + \underbrace{T^{-1} \bar{g}(Tx)}_{\equiv F(x)}$$

$$\dot{x} = J x + F_2(x) + F_3(x) + \dots + F_{r-1}(x) + \mathcal{O}(|x|^r)$$

nächste Schritte geben Regeln die Terme höherer Ordnung zu vereinfachen

- sukzessive sollen quadratische Terme, kubische Terme usw. eleminiert werden über Koordinatentransformation

$$x = y + h_2(y) + h_3(y) + \dots + h_{r-1}(y) + \mathcal{O}(|y|^r)$$

wobei $h_n(y)$ ein homogenes Vektorpolynom n'ter Ordnung ist, d.h. alle Monome haben gleichen Grad n.

In den Mannigfaltigkeitskoordinaten x, y, z

$\dot{x} = f(x)$ Zentrumsmannigfaltigkeit

$\dot{y} = -y$ stabile Mann.

$\dot{z} = z$ instabile Mann

Orbitstruktur beim Stabilitätswechsel wird durch Zentrumsmannigfaltigkeitsgleichung bestimmt

$$\dot{x} = f(x, \mu)$$

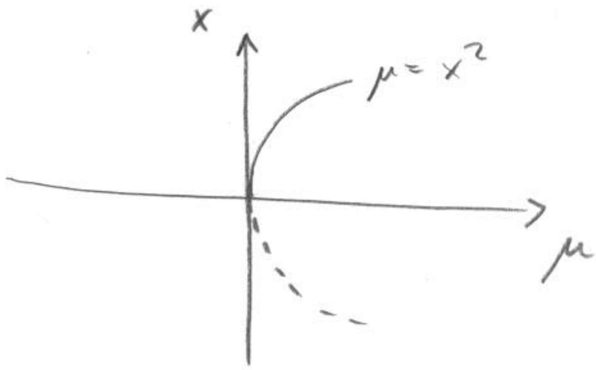
ohne Semikolon!

- Sattel-Knoten-Bifurkation

$$\boxed{\dot{x} = \mu - x^2}$$

$f(0,0) = 0$ Fixpunkt bdg.

$\frac{\partial}{\partial x} f(0,0) = 0$ Eigenwert gl. Null



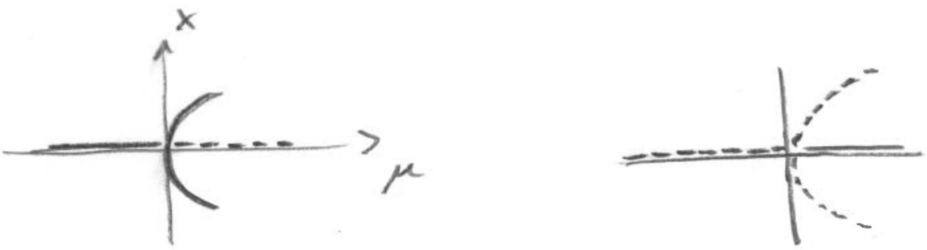
$$x^*_{1/2} = \pm\sqrt{\mu}$$

- Transkritische Bifurkation

$$\dot{x} = \mu x - x^2$$ siehe $\overline{\underline{XXII}}$

- Pitchfork Bifurkation

$$\dot{x} = \mu x - x^3 \qquad \dot{x} = \mu x + x^3$$



Superkritisch   subkritische

Wie zweigt der Ast ab?

über den Bifurkationspkt : "super"

Hinter den " : "sub"

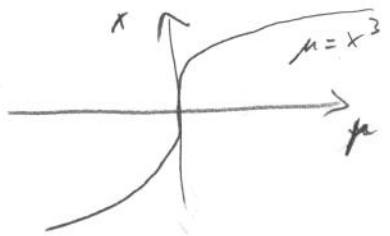
(nicht auf Stabilität achten, nur Abbiegung)

- Keine Bifurkation

$\dot{x} = \mu - x^3$

$f(0,0) = 0$ FP !

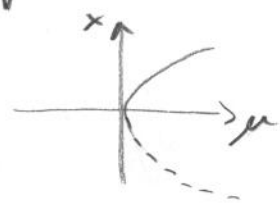
$\frac{\partial}{\partial x} f(0,0) = 0$ EW nicht hyperbolisch



Sattel-Knoten-Bifurkation

Welche Bedingungen müssen gelten ? FP ist nicht hyperbolisch
2 Bdgen.

$\dot{x} = \mu - x^2$



$\frac{d\mu}{dx}(0) = 0$ tangential zu $\mu = 0$

$\frac{d^2\mu}{dx^2}(0) \neq 0$ Kurve liegt auf einer Seite

Allgemein 2 Bdgen $\boxed{f(0,0) \;,\; \frac{\partial}{\partial x} f(0,0) = 0}$

(Satz v.d. impliziten Fkt)

und $\boxed{\frac{\partial f}{\partial \mu}(0,0) \neq 0}$ dann existiert

$\mu = \mu(x)$ als eindeutige Funktion mit $\mu(0) = 0$

daraus folgt (nach einigen Überlegungen s. z. B. Wiggins Seite 364.)

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) \neq 0} \quad (4)$$

"auf einer Seite" (4)

Transkritische Bifurkation

(1) + (2) nicht hyperbolischer Fixpunkt

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \mu}(0,0) = 0} \quad (3)$$

zwei Kurven (nicht eindeutig)

und

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(0,0) \neq 0} \quad (4)$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) \neq 0} \quad (5)$$

Pitchfork Bifurkation

(1) + (2)

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \mu}(0,0) = 0} \quad (3)$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0} \quad (4)$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x \partial \mu}(0,0) \neq 0} \quad (5)$$

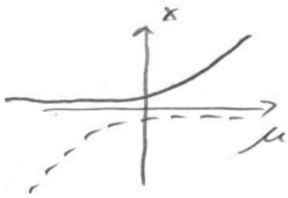
$$\boxed{\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0) \neq 0} \quad (6)$$

Stabilität bei Störung der Normalform

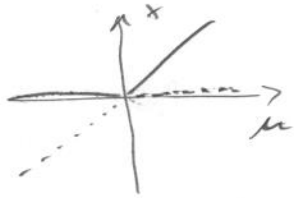
Transkritische

$\dot{x} = \mu x \mp x^2 \quad \longrightarrow \quad \dot{x} = \varepsilon + \mu x \mp x^2$

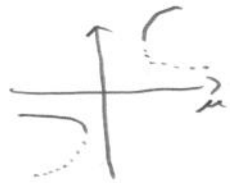
$\varepsilon > 0$



$\varepsilon = 0$



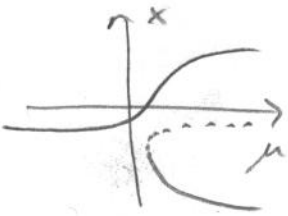
$\varepsilon < 0$



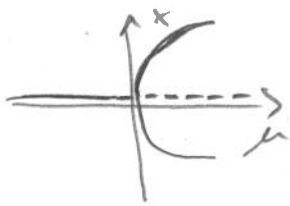
Pitchfork

$\dot{x} = \mu - x^3$

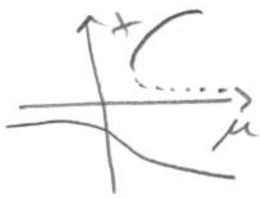
$\varepsilon > 0$



$\varepsilon = 0$



$\varepsilon < 0$



- beide nicht stabil gegenüber Störungen in Form von Termen niedriger Ordnung (verglichen zu den ersten nichtverschwindenden Termen der Taylor-Entwicklung)

Hopf-Bifurkation

wird nur angerissen!

Betrachte $x_1 = \mu x_1 - u_1^3$

$x_2 = \omega$ ← Phasenoszillator

Vieles analog zur Pitchfork!

Normalenform in komplexer Schreibweise

$$\dot{z} = (\alpha + i) z + \gamma |z|^2 z$$

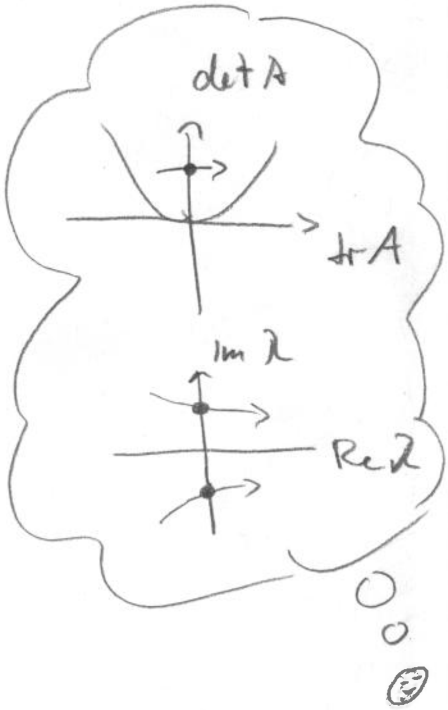
mit $z = \rho e^{i\varphi}$

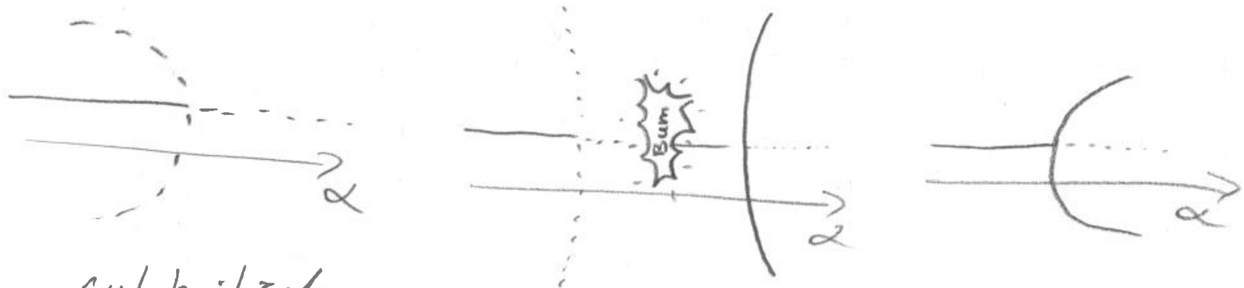
$$\dot{z} = (\alpha + i + \gamma \rho^2) \rho e^{i\varphi}$$

$$\dot{\rho} + i \dot{\varphi} \rho = (\alpha + i + \gamma \rho^2) \rho$$

$$\dot{\rho} = \rho (\alpha + \gamma \rho^2)$$

$$\dot{\varphi} = 1$$





subkritisch superkritisch

$\gamma > 0$ $\gamma = 0$ $\gamma < 0$