Reaktions-Diffusions-Systeme

$$\dot{u} = f(u) + \Delta u$$

$\uparrow$ Laplace-Operator

bekannt z.B. aus Problemen der Wärmeleitung

Parabolische partielle Differentialgleichung

"PDE" (engl.)

PDE zweiter Ordnung $\quad Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G$

$u_x \equiv \frac{\partial u}{\partial x}$, $\quad u_{xy} \equiv \frac{\partial u}{\partial x \partial y}$ etc

Wenn $B^2 - 4AC = 0 \Rightarrow$ parabolisch

" $\quad > 0 \Rightarrow$ hyperbolisch

" $\quad < 0 \quad$ elliptisch

In dieser Vorlesungsstunde wollen wir ~~in~~ insbesondere "traveling wave solutions" uns anschauen.

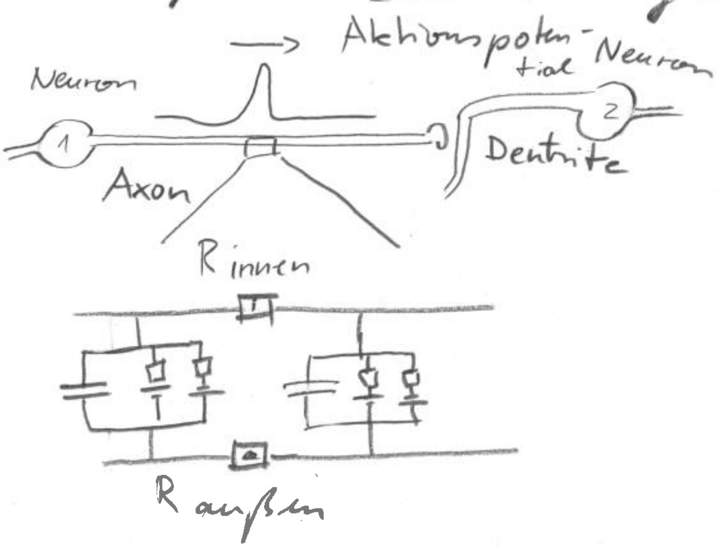
Achtung: $\quad u_{tt} = \alpha^2 u_{xx}$ hyperbolische PDE

gilt als "wave equation"

nicht triviale Lösung der Form $\quad \dot{u}(\xi) = 0 \quad$ mit $\xi = x - ct$

(eigentlich $u(x,t) \to \tilde{u}(\xi)$ durch Transf. mitbewegte Koord.)

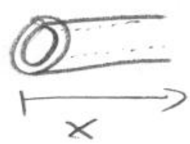
Beispiel: Nervenleitung



Bisher:

Punktneuron

Zylindrische Geometrie

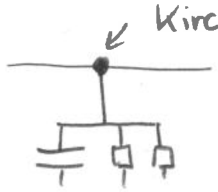


$R_i \gg R_o \approx 0$ außen Isopotential

spezifische Widerstände $R_i = r_i \, \Delta x \, \frac{1}{\pi a^2}$

$$V(x+\Delta x, t) - V(x,t) = -I_\ell(x,t)\, R_L$$

$$I_\ell(x,t) = -\frac{\pi a^2}{r_i} \frac{\partial V}{\partial x}(x,t)$$



$$0 = \frac{c_m}{2\pi a \Delta x} \frac{\partial V}{\partial t} + 2\pi a \Delta x \, i_{ion} + \frac{\pi a^2}{r_L} \frac{\partial V}{\partial x}(x,t) - \frac{\pi a^2}{r_L} \frac{\partial V}{\partial x}(x+\Delta t, t)$$

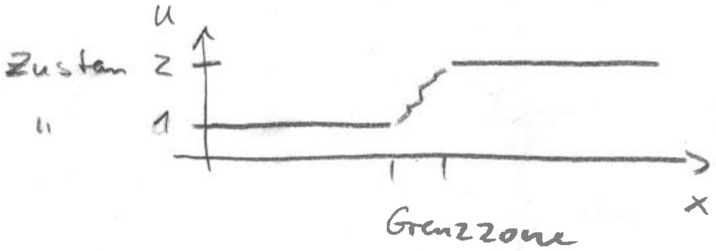
$$\underbrace{\underbrace{c_m \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{a}{2 r_L} \frac{\partial^2}{\partial x^2} V}_{\text{Diffusions-Gleichung}} - i_{ion}}_{\text{RD-Gleichung}}$$

RD: Reaktions-Diffusion

Einfachste System u, $f(u)$ Skalar

Frontpropagation: Ein Zustand invadiert einen anderen

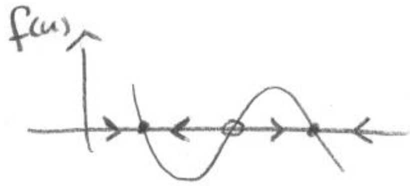
$t = t_0$



Welcher Zustand zu $t \gg t_0$

Zustand 1 und 2 sollen beide stabil sein

$$\frac{\partial f(u^*_{1/2})}{\partial x} < 0$$



$$\boxed{\dot{u} = u(u-\alpha)(u-1) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} u}$$

Kennen wir als Schwellwertreduktion bzw. innere Lösung des FitzHugh-Nagumo Modell

1938
- Zeldovich, Frank-Kamenetskii (und Semenov): Verbrennungsvorgänge
  ↳ 1956 Nobel-Preis
- Hodgkin (~1959) "Migräne"-Wellen Spreading Depression
- Schlögl Chemische Fronten (1972)

$$\left.\begin{aligned} A + 2U &\underset{k_2}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} 3U \\ B &\underset{k_4}{\overset{k_3}{\rightleftharpoons}} U \end{aligned}\right\} \quad \dot{u} = k_1 a u^2 - k_2 u^3 - k_4 u + k_3 b$$

(mit $A + U \rightleftharpoons 2U$ kommt man auf Fischer-Kolmogorov Gleichung)

Transformation in ein mitbewegtes Koordinatensystem

$$x \longrightarrow \xi = x + ct$$

$$t \longrightarrow t' = t$$

Koordinatentransformationen

$$\frac{\partial}{\partial x} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial t'} + c\,\frac{\partial}{\partial \xi}$$

Differentialoperatoren transformiert

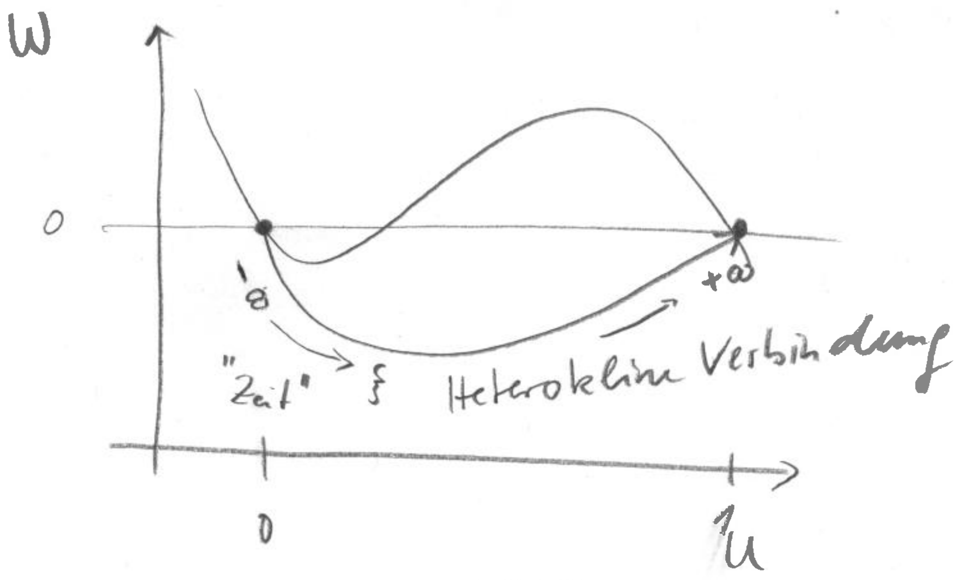
$$\dot{u}(\xi) = u\,(u-\alpha)\,(u-1) - c\,\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$$

Diffusionsterm

Konvektions- oder Advektionsterm genannt

mit $\frac{\partial}{\partial \xi}u \equiv w(\xi)$ und $\dot{u}(\xi) = 0$

traveling wave solution



$$\frac{dw}{du} = \dots$$

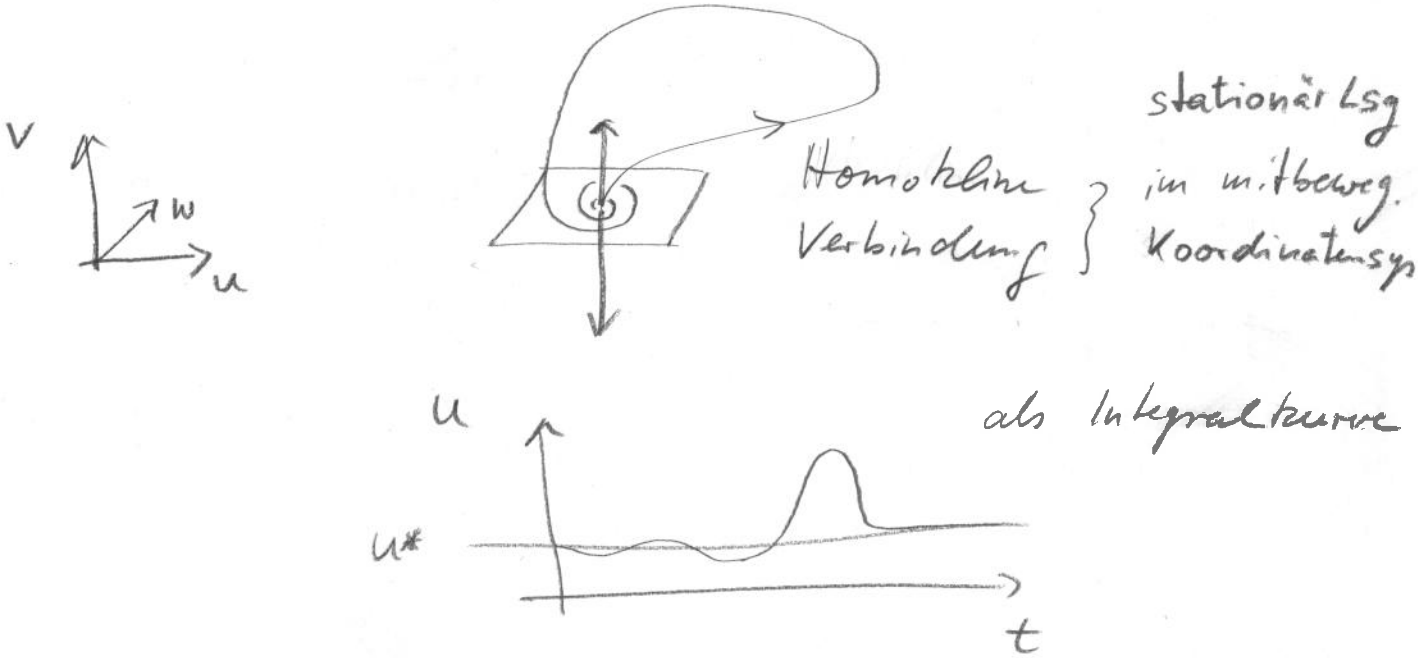
$$\Rightarrow c \sim \sqrt{D}\,(1-2\alpha)$$

$$A = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{D}{2}}$$

$$u = \frac{1}{2}\left(1 + \tanh(A\xi)\right)$$

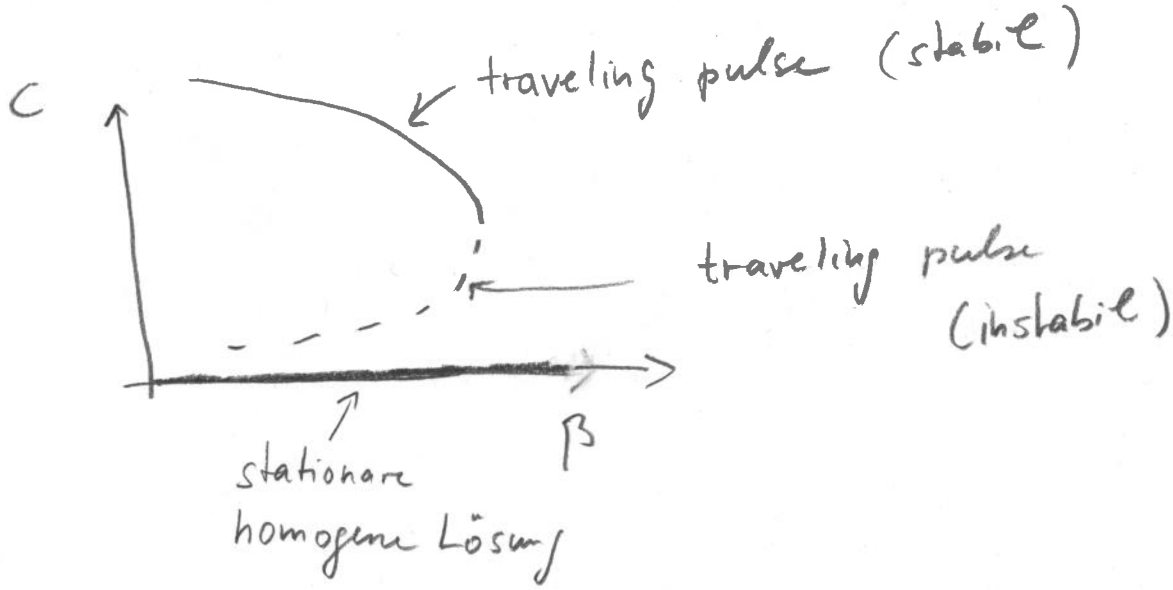
Analog (allerdings ohne analytische Lösung)

für das FitzHugh-Nagumo-System



$$\dot{u} = u - \frac{u^3}{3} - v + \Delta u$$

$$\dot{v} = u + \beta - \gamma v$$



Lösen der RD-Systeme im Computer-Modell

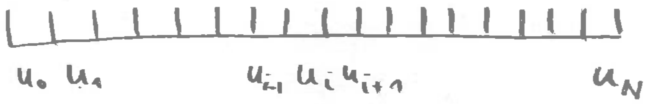
- gute numerische Methoden sind Spektralmethode bzw. Pseudo-Spektralmethode: Unbekannte Spektral-koeffizienten der Fourierreihe (oder andere Ansatzfunktion)

- Euler ist nach wie vor in Gebrauch bei parabolischen PDEs

$$u(t+h) \approx u(t) + h A u(t)$$ s. XXII (A3)

$$A_2 = \begin{bmatrix} \ddots & & & & \\ & 1 & -2 & 1 & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

diskretisierte Laplace-Operator $\nabla^2 \equiv \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$



$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u_i \approx u_{i-1} - 2u_i - u_{i+1}$$

Konstante: $A_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$; Linear: $A_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$; Quadratisch: $A_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \\ 16 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ \vdots \end{bmatrix}$

$$A_2 \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \underbrace{2\cos t - 2}_{\text{EW}} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Rampe: $A_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$u_1 = \sin t$; $\cos t$; e^{it}

$u_2 = \sin 2t$; $\cos 2t$; e^{2it}

$\vdots$

Sinus, Cosinus und Exp.Fkt. sind EV

Erste Ableitung

$$\frac{u(x+h)-u(x)}{h} \quad (\text{vorwärts})$$

$$\frac{u(x)-u(x-h)}{h} \quad (\text{rückwärts})$$

zentriert 2te Ordnung

$$\frac{u(x+h)-u(x-h)}{2h}$$

$$\Rightarrow \quad A_1 = \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ -1 & 0 & 1 & \\ & -1 & 0 & 1 \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \quad (\text{zentriert})$$

vorwärts

$$A_{1+} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \cdots \\ & & & \ddots & \end{bmatrix} ;$$

rückwärts

$$A_{1-} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & -1 & \cdots \\ \cdots & & & \end{bmatrix}$$

Zweite Ableitung $A_2 = A_{1-} A_{1+}$ ergibt 2te Ordnung

(Achtung bei Randbedingungen !!)

Integrieren

$$A_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ 1 & 1 & 1 & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

überprüfen !