Musterbildung in 2D

- Muster können auch rein zeitlicher Natur sein, Beispiel einfache Oszillationen

  Strukturbildung oder Morphogenese meint dagegen raum-zeitliche Muster

Alan Turing (1912) hat fundamentale theoretische Aspekte mit Hilfe von Reaktions-Diffussions-Systemen erklären können.

Unterschied zu den "traveling waves" (XXV):

Spontane Strukturbildung räumlich stationärer Muster ("traveling waves" wurden angeregt und sind nur im mitbewegten Koordinaten-system stationär)

(Der Turing-Mechanismus kann leider aus Zeitgründen nicht mehr abgeandelt werden)

Musterbildung am Beispiel der Migräne

Wir schauen wieder auf "traveling wave" Lösungen, nun aber in 2 räumlichen Dimensionen am Beispiel.

$$\dot{u} = f(u,v) + \nabla^2 u$$
$$\dot{v} = \varepsilon\, g(u,v) + D_v \nabla^2 v$$

Aktivator - Inhibitor - System

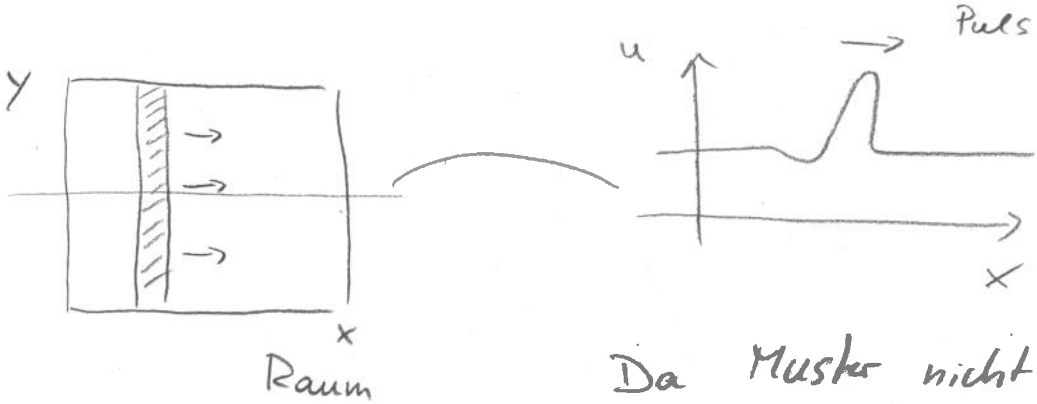
Nur eine Zeitskalentrennung sowie nur einen Diffusionskoeffizienten. Ratenfunktionen sind auf "1" normiert.

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

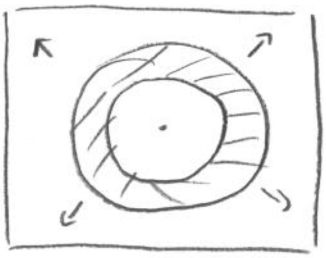
in kartesischen Koo. x, y

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$



Da Muster nicht von y-Koordinate abhängt ($\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$)

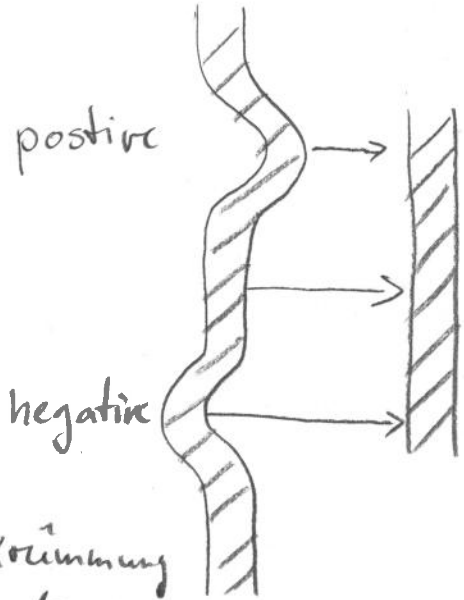


In Polarkoordinaten $\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2} = 0$

$\Rightarrow$ 1 D - Probem

mit $\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)$

für große r $\rightarrow$ planaren Puls



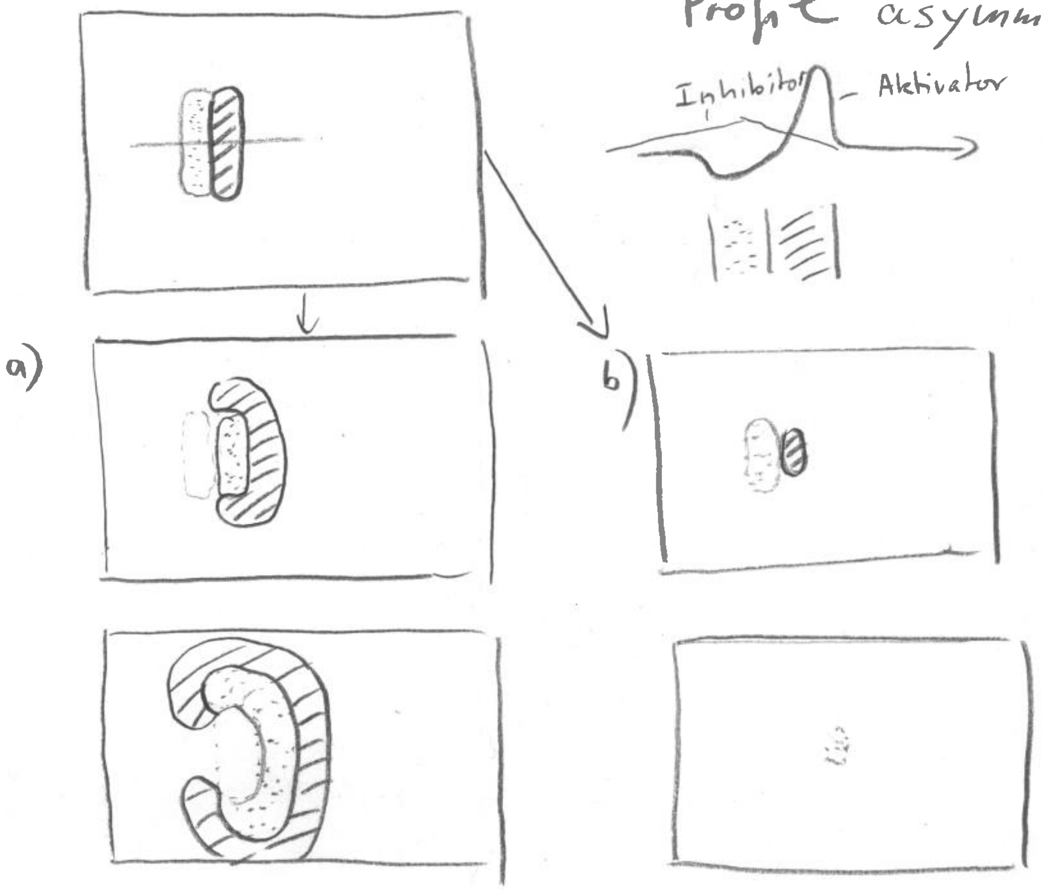
Krümmung als Störung planarer Pulse

(geodätische Krümmung)

Profile asymmetrisch!

Konzentr.-Isolinie $u = u_i$

$S = \int H(u - u_i)\, d\vec{x}$

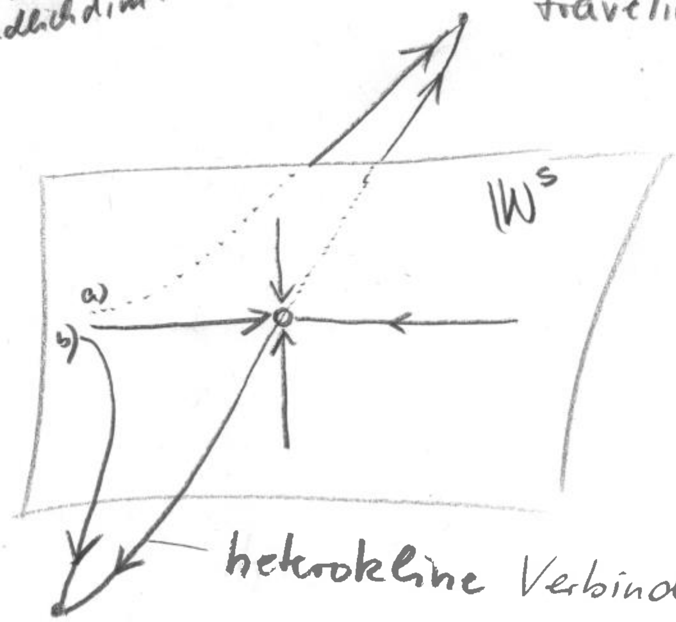


überschwellig

unterschwellig

Phasenraum unendlich dim.

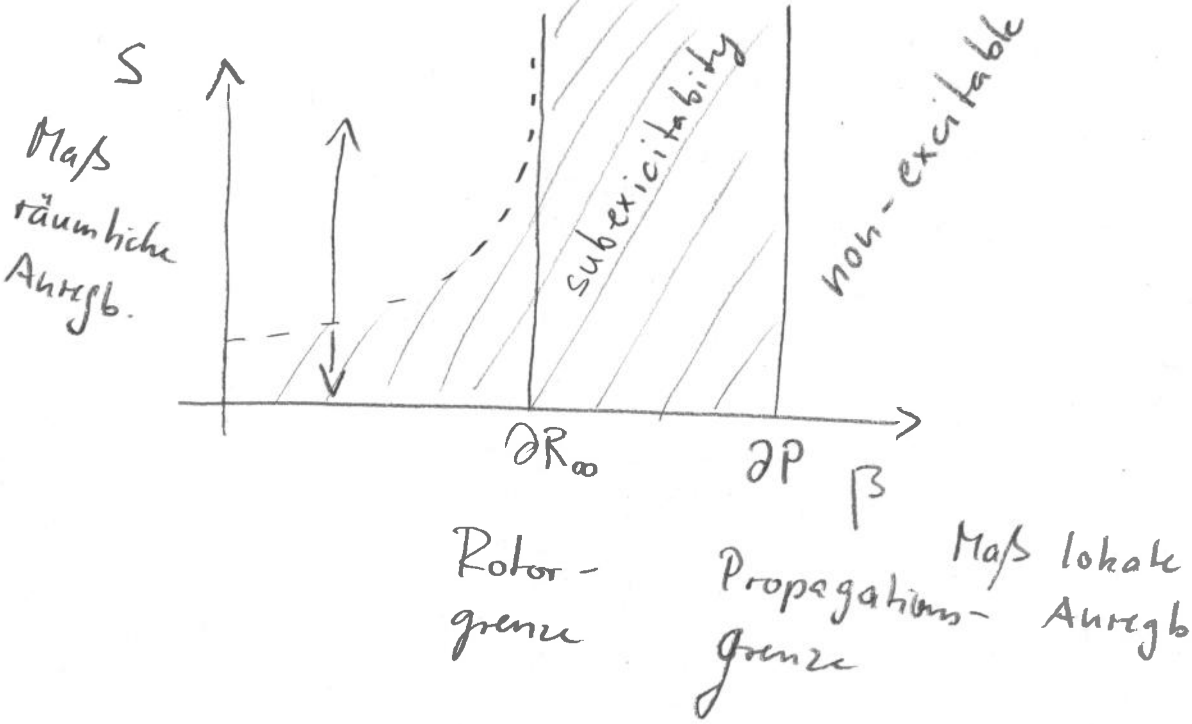
traveling wave Lösung

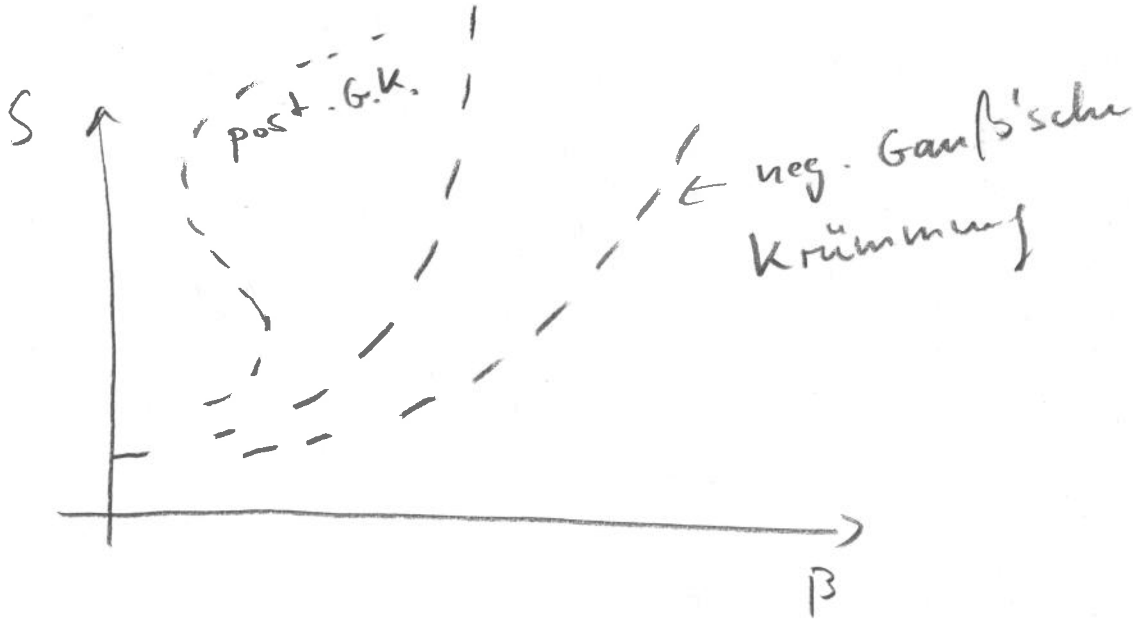


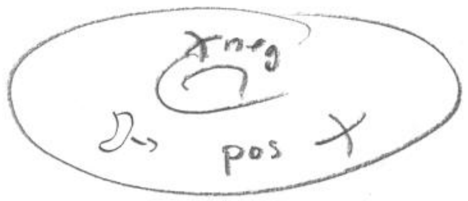
Sattel ist ein Muster

heterokline Verbindungen von der "Keimlösung" zu den beiden stabilen Lösungen des anregbaren Mediums

Bifurkationsdiagramm von Keimlösungen







Keimlösungen auf gekrümmten Medien

Krümmungsinduzierte Änderung der Stabilität.