

3. Übungsblatt zur Allgemeinen Relativitätstheorie I

Abgabe: Freitag, den 23. November 2012 vor der Übung

Ausgabe: Freitag, den 09. November 2012

Jeder Übungszettel bringt 10 Punkte!

Maxwellsche Gleichungen in 4er Schreibweise

a) Zeigen Sie, daß die 4er Schreibweise der Maxwellschen Gleichungen:

$$\partial_\beta F^{\alpha\beta} = 4\pi j^\beta \quad (1)$$

$$\partial_{\langle\beta} F_{\gamma\delta\rangle} = 0 \quad (2)$$

mit

$$F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

und $j^\mu = (\rho, \mathbf{j}/c)$ für Gleichung (1) den Maxwellschen Gleichungen

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\mathbf{E} &= 4\pi\rho \\ \operatorname{rot}\mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

und für Gleichung (2)

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\mathbf{B} &= 0 \\ \operatorname{rot}\mathbf{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \end{aligned}$$

entspricht. Dabei meint das Symbol $\langle\alpha\beta\gamma\rangle$, daß über die Indizes in der Klammer zyklisch zu permutieren ist. Nutzen Sie eine Minkowskimetrik der Form $\eta^{\alpha\beta} = \operatorname{diag}[-1, 1, 1, 1]$. Lassen Sie sich nicht durch die Wahl der Vorfaktoren in den Gleichungen irritieren - hier sind verschiedene Möglichkeiten gleichberechtigt nutzbar, es muß lediglich alles zueinander passen!

b) Zeigen Sie, daß die Gleichungen (1,2) durch den Ansatz

$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha \quad (3)$$

und die Verwendung der Lorenzbedingung $\partial_\alpha A^\alpha = 0$ in die Form

$$\square A^\alpha = 4\pi j^\alpha \quad (4)$$

gebracht werden können.

Warum ist die Lorenzbedingung möglich?

c) Der Energie-Impulstensor des Maxwell'schen Feldes ist gegeben durch:

$$T^{\beta\gamma} = \frac{1}{4\pi} \left(F^{\beta\sigma} F^{\gamma\kappa} \eta_{\sigma\kappa} - \frac{1}{4} \eta^{\beta\gamma} F^{\kappa\lambda} F_{\kappa\lambda} \right). \quad (5)$$

Bestimmen Sie explizit die Komponenten des Tensors und identifizieren Sie diese Größen mit bekannten Größen aus der Elektrodynamik. (Es geht hier um Spannungen, Energiedichten, etc.)

d) Berechnen Sie die Divergenz des Energie-Impuls-Tensors des elektromagnetischen Feldes:

$$\partial_\gamma T^{\beta\gamma} = \dots \quad (6)$$

Welche Komponente entspricht dem Satz von Poynting, was bedeuten die restlichen Komponenten dieser Vierergleichung?

Eine Kommentierung Ihres Vorgehens wird erwartet! Dafür gibt es auch Punkte!

Sprechstunde: Nach Vereinbarung oder direkt nach der Übung.

Falls es Fragen gibt, bin ich auch per Mail erreichbar:

gerold.schellstede@campus.tu-berlin.de