Technische Universität Berlin, Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. von Borzeszkowski; Dr. Chrobok; Schellstede

4. Übungsblatt zur Allgemeinen Relativitätstheorie I

Abgabe: Freitag, den 07. Dezember 2012 vor der Übung
Ausgabe: Freitag, den 16. November 2012
Jeder Übungszettel bringt 10 Punkte!

1. Die 4-er Beschleunigung
In Analogie zur 4-er Geschwindigkeit u^μ wird die 4-er Beschleunigung als

$$\dot{u}^\mu := u^\alpha \partial_\alpha u^\mu = \frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\tau} \tag{1}$$

definiert.

Leiten sie die Darstellung der 4-er Beschleunigung in Raum- und Zeitkomponenten ab. Welche Form besitzt diese im momentanen Ruhsystem?

Beachten Sie dabei, daß wir in dieser Aufgabe die Vierer-Geschwindigkeit als ein Feld annehmen wollen, daß z.B. die Bewegung eines Fluids beschreibt ($u^\mu = u^\mu(x^\iota)$). Zudem ist die Definition der Newtonschen substantiellen Beschleunigung zu Beachten:

$$a^m = \frac{\partial}{\partial t} v^m + v^a \frac{\partial}{\partial x^a} v^m\,. \tag{2}$$

2. Ein bißchen Algebra

In der Allgemeinen Relativitätstheorie spielen die Christoffelsymbole (kein Tensor!)

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\rho}(g_{\beta\rho,\gamma} + g_{\rho\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\rho})$$

eine fundamentale Rolle. Zeigen Sie deren Symmetrie im unteren Indexpaar für eine symmetrische Metrik $g_{\alpha\beta}$.

Aus den Christoffelsymbolen und deren partiellen Ableitungen wird der Riemannsche Krümmungstensor definiert durch:

$$R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = \Gamma^\alpha_{\beta\delta,\gamma} - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma,\delta} + \Gamma^\alpha_{\gamma\sigma}\Gamma^\sigma_{\beta\delta} - \Gamma^\alpha_{\delta\sigma}\Gamma^\sigma_{\beta\gamma}.$$

Weisen Sie die Antisymmetrie im hinteren Indexpaar nach.

Zeigen Sie weiterhin dass gilt:

$$R^\alpha_{\beta\gamma\delta} + R^\alpha_{\delta\beta\gamma} + R^\alpha_{\gamma\delta\beta} = 0$$

Benutzen Sie dabei die oben gezeigte Symmetrie der Christoffelsymbole.

3. Energie-Impuls-Bilanz eines idealen Fluids in der Speziellen Relativitätstheorie

Der Energie-Impuls-Tensor eines idealen Fluids ist gegeben durch

$$T^{\alpha\beta} = \left(\rho + \frac{u}{c^2}\right) u^\alpha u^\beta + p\, h^{\alpha\beta},$$

wobei μ die Massendichte, p der Druck und u^α das Geschwindigkeitsfeld der Flüssigkeit ist. $h^{\alpha\beta} := u^\alpha u^\beta / c^2 + \eta^{\alpha\beta}$ ist dabei der sogenannte Projektor und u (ohne Indizes) die Dichte der inneren Energie. Nutzen Sie in dieser Aufgabe die Minkowskimetrik in der Form $\eta^{\alpha\beta} = \mathrm{diag}[1, 1, 1, -1]$

(I) Leiten Sie die relativistische Energie-Bilanz und die relativistische Euler-Gleichung ab:

$$h^i_a \partial_b T^{ab} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \left(\mu + \frac{u+p}{c^2}\right) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} u^i + h^{ik} \partial_k p = 0 \quad , \tag{3}$$

$$u_a \partial_b T^{ab} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \partial_b \left(\left[\mu + \frac{u}{c^2}\right] u^b \right) + \frac{p}{c^2} \Theta = 0 \quad . \tag{4}$$

(kräftefreier Fall) für diesen Tensor ab. Darin bezeichnen $\dot{a}^\beta := a^\beta_{,\alpha} u^\alpha$ die Eigenzeitableitung und $\Theta := u^\alpha_{,\alpha}$ die Divergenz des Geschwindigkeitsfeldes.

(II) Beweisen Sie, daß die Energie-Bilanz dieser Gleichung im nichtrelativistischen Grenzfall in die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \partial_i (\mu v^i) = 0 \tag{5}$$

übergeht. Benutzen Sie die Zerlegungen für $(u^\alpha) = \gamma(c, v^i)$ und beachten Sie, daß $\gamma \cong 1$, sowie $c^2 >> v^2$ gilt.

(III) Zeigen Sie, daß die rel. Euler-Gleichung im Newtonschen Grenzfall ($v^2 << c^2$) in die bekannten Eulerschen Gleichungen der Hydrodynamik übergehen:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu v^k\right) + \partial_i \left(\mu v^i v^k + p\delta^{ik}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathbf{v} + \mathrm{grad}\, p = 0\,. \tag{6}$$

Dabei gilt die Definition:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} := \frac{\partial}{\partial t} + v^k \partial_k = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}\,\mathrm{grad}) \ . \tag{7}$$

Warum muß man sich hier nur um die räumlichen Komponenten kümmern / Warum enthält die zeitliche Komponente keine zusätzliche Information?

Eine Kommentierung Ihres Vorgehens wird erwartet! Dafür gibt es auch Punkte!

Sprechstunde: Nach Vereinbarung oder direkt nach der Übung.
Falls es Fragen gibt, bin ich auch per Mail erreichbar:
gerold.schellstede@campus.tu-berlin.de