Technische Universität Berlin, Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. von Borzeszkowski; Dr. Chrobok; Schellstede

5. Übungsblatt zur Allgemeinen Relativitätstheorie I

Abgabe: Freitag, den 14. Dezember 2012 vor der Übung
Ausgabe: Freitag, den 30. November 2012
Jeder Übungszettel bringt 10 Punkte!

1) Transformationsverhalten der Christoffelsymbole

Zeigen Sie, daß für die Transformation der Christoffelsymbole folgende Beziehung gilt

$$\Gamma^{m'}_{t'k'} = \Gamma^{n}_{rs} A^{m'}_{n} A^{r}_{t'} A^{s}_{k'} - A^{m'}_{n,l} A^{l}_{t'} A^{n}_{k'}.$$

Die $A^{m'}_{n}$ bezeichnen die Transformationsmatrizen. Sie können dabei nutzen, daß die kovariante Ableitung ein tensorielles Transformationsverhalten besitzt.

2) Lemma von Ricci

Beweisen, daß die affine Konnexion, mit der die kovariante Ableitung definiert wird, die Christoffelsche seien muß, wenn wir sie als symmetrisch voraussetzen und die Metrik kovariant konstant seien soll:

$$g_{\alpha\beta;\gamma} = 0$$

3) Verkürzte Identität von Bianchi-Padova

Leiten Sie mithilfe der Definition des Krümmungstensors die Identität von Bianchi her:

$$R_{\alpha\mu\sigma;\tau} + R_{\alpha\mu\sigma\tau;\iota} + R_{\alpha\mu\tau\iota;\sigma} = 0\,. \tag{1}$$

Nutzen Sie dazu, daß in lokal geodätischen Koordinaten lokal das Christoffelsymbol zum verschwinden gebracht werden kann.

Zeigen Sie jetzt, daß aus dieser Identität die kovariante Konstanz des Einsteintensors folgt:

$$\nabla_\nu G^{\mu\nu} = 0 \quad \text{mit} \quad G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}\,. \tag{2}$$

Dabei sind $R_{\mu\nu}$ der Ricci-Tensor und R der Ricci-Skalar.

Eine Kommentierung Ihres Vorgehens wird erwartet! Dafür gibt es auch Punkte!

Sprechstunde: Nach Vereinbarung oder direkt nach der Übung.
Falls es Fragen gibt, bin ich auch per Mail erreichbar:
gerold.schellstede@campus.tu-berlin.de