Prof. Dr. Harald Engel
Dipl. Phys. Mathias Hayn
Wassilij Kopylov, M.Sc.
Jan Totz, M.Sc.

3. Übungsblatt – Quantenmechanik II

Abgabe: Di. 20. 11. 2012 bis 18:00 Uhr im Briefkasten am Ausgang des ER-Gebäudes

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in 3er-Gruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummer und das Tutorium an!

Aufgabe 7 (5 Punkte): *Transformationsverhalten der Spinoren*

Wie in Aufgabe 6 betrachten wir auch in dieser Aufgabe infinitesimale Lorentz-Transformationen in der x^α-x^β-Ebene mit festen $\alpha, \beta \in \{1,2,3\}$, welche durch den Parameter $\theta \ll 1$ charakterisiert seien. Benutzen Sie die Ergebnisse für infinitesimale Lorentz-Transformationen aus Aufgabe 6 und zeigen Sie, dass sich der Spinor $\psi(x)$ im ersten Inertialsystem durch den Spinor $\psi'(x)$ im zweiten Inertialsystem durch

$$\psi(x) = S^{-1}_{\alpha\beta}(\theta) \cdot \psi'(x') \approx \left(\mathbb{1} + i\,\theta\left[\hat{O}_1\mathbb{1} + \hat{O}_2\right]\right) \cdot \psi'(x) \tag{1}$$

darstellen lässt und interpretieren Sie den dabei auftretenden skalaren $\hat{O}_1$ und Matrix-wertigen Operator $\hat{O}_2$. Für die Interpretation von $\hat{O}_2$ kann es nützlich sein, eine explizite Darstellung für die γ-Matrizen zu wählen.

Aufgabe 8 (9 Punkte): *Relativistisches Wasserstoffatom - Teil 1*

Das Ziel dieser und einer Aufgabe auf dem nächsten Übungsblatt besteht darin, das Energiespektrum des Wasserstoffatoms mithilfe der stationären Dirac-Gleichung auszurechnen. Wir setzen hier $c = \hbar = 1$. Betrachten Sie die Dirac-Gleichung im Coulomb-Potential, $V(r) = -\frac{Z\alpha}{r}$, α ist die schon bekannte Feinstrukturkonstante. Zur Lösung nehmen wir folgenden Ansatz für den Eigenvektor an: $\psi^\pm_{j,m_j} = \begin{pmatrix} i\frac{G(r)}{r}\,\phi^\pm_{j,m_j} \\ \frac{F(r)}{r}\cdot\left(\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{x}}{r}\right)\phi^\pm_{j,m_j}\end{pmatrix}$, wobei $\phi^\pm_{j,m_j}$ zweier-Spinoren sind und die Eigenwertgleichungen

$$\mathbf{J}^2\phi^\pm_{j,m_j} = j(j+1)\phi^\pm_{j,m_j}, \tag{2}$$

$$\mathbf{L}^2\phi^\pm_{j,m_j} = l(l+1)\phi^\pm_{j,m_j}, \tag{3}$$

$$J_z\phi^\pm_{j,m_j} = m_j\phi^\pm_{j,m_j}, \tag{4}$$

$$\mathbf{S}^2\phi^\pm_{j,m_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\phi^\pm_{j,m_j}, \tag{5}$$

mit $j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, ..., l = j \mp \frac{1}{2}$ und $m_j = -j, ..., j$ erfüllen. Zur Erinnerung, der Gesamtdrehimpuls ist durch $\mathbf{J} = \mathbf{L}\mathbb{1} + \mathbf{S}$ gegeben, mit $S_i = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sigma_\mathbf{i} & 0 \\ 0 & \sigma_\mathbf{i}\end{pmatrix}$.

1. Zeigen Sie zuerst folgende Relationen. Beachten Sie dabei, dass $\mathbf{x}^2 = r^2$ ist.

   (a) $\mathbf{L}\cdot\boldsymbol{\sigma}\,\phi^\pm_{j,m_j} = [-1 \pm (j+\frac{1}{2})]\phi^\pm_{j,m_j}$. Tipp: Benutzen Sie dazu $\mathbf{J}^2$.

   (b) $\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\,f(r)\phi^\pm_{j,m_j} = -i\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{x}}{r^2}\left[r\frac{\partial}{\partial r} + 1 \mp (j+1/2)\right]f(r)\phi^\pm_{j,m_j}$, Tipp: Zeigen und Benutzen Sie dazu $1 = (\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{x}/r)\,(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{x}/r)$.

   (c) und $(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\frac{\mathbf{x}}{r})f(r)\phi^\pm_{j,m_j} = -\frac{i}{r}\left[r\frac{\partial}{\partial r} + 1 \pm (j+\frac{1}{2})\right]f(r)\phi^\pm_{j,m_j}$.

   Rückseite beachten!

2. Jetzt können wir das stationäre Eigenwertproblem $H\psi^{\pm}_{j,m_j} = E\psi^{\pm}_{j,m_j}$ betrachten. Leiten Sie nun unter Zuhilfenahme der gerade gezeigten Beziehungen ein Differentialgleichungssystem für die Funktionen G und F ab. Benutzen Sie dazu H in der Matrixdarstellung, also

$$H = \begin{pmatrix} m_0 + V & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & -m_0 + V \end{pmatrix} .$$

Benutzen Sie anschließend folgende Substitutionen (auf richtige Substitution der Ableitung achten!) $\alpha_1 = m_0 + E, \alpha_2 = m_0 - E, \sigma = \sqrt{m_0^2 - E^2} = \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}, \rho = r\sigma, k = \pm(j + \frac{1}{2}), \gamma = Z\alpha$. In dieser Sprache erhält das Differentialgleichungssystem folgende Form

$$\left(\frac{d}{d\rho} + \frac{k}{\rho}\right) F - \left(\frac{\alpha_2}{\sigma} - \frac{\gamma}{\rho}\right) G = 0\,, \tag{6}$$

$$\left(\frac{d}{d\rho} - \frac{k}{\rho}\right) G - \left(\frac{\alpha_1}{\sigma} + \frac{\gamma}{\rho}\right) F = 0\,. \tag{7}$$

Die Fortsetzung folgt auf dem nächsten Übungsblatt.

Vorlesung: Di. um 8:30 Uhr – 10:00 Uhr in EW 203,
Do. um 8:30 Uhr – 10:00 Uhr in EW 203.

Scheinkriterien:

- Mindestens 50% der schriftlichen Übungspunkte.
- Regelmäßige und aktive Teilnahme in den Tutorien (u.a. mindestens einmal vorrechnen).

Sprechzeiten:

Name	**Tag**	**Zeit**	**Raum**	**Tel.**
Prof. Dr. Harald Engel	Mi	14:30 – 16:00 Uhr	EW 738	79462
Mathias Hayn	Mo	15:00 – 17:00 Uhr	EW 711	27884
Wassilij Kopylov		nach Vereinbarung	EW 705	26143
Jan Totz		nach Vereinbarung	EW 627	27681