Prof. Dr. Harald Engel
Dipl. Phys. Mathias Hayn
Wassilij Kopylov, M.Sc.
Jan Totz, M.Sc.

# 8. Übungsblatt – Quantenmechanik II

**Abgabe: Di. 15. 1. 2013 bis 18:00 Uhr im Briefkasten am Ausgang des ER-Gebäudes**

*Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in 3er-Gruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummer und das Tutorium an!*

**Aufgabe 17 (9 Punkte):** *Elektronen-Emission*
Für zeitabhängige Störungen der Form $\hat{H}_{\text{int}}(t) = \hat{H}_{\text{int}}\, \mathrm{e}^{-i\omega t}$ leitet man mit Hilfe der ersten Ordnung zeitabhängiger Störungstheorie die sogenannte *Fermis Goldene Regel* (FGR) ab:

$$R_{i\to f} = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \langle f|\hat{H}_{\text{int}}|i\rangle \right|^2 \delta\left(E_f - E_i - \hbar\,\omega\right). \tag{1}$$

Mithilfe der FGR lässt sich die Rate $R_{i\to f}$ berechnen, mit welcher der Anfangszustand $|i\rangle$ in den Endzustand $|f\rangle$ (mit $\langle i|f\rangle = 0$) unter Wirkung der Störung $\hat{H}_{\text{int}}$ übergeht. Dabei sind $E_i$ und $E_f$ die Energien des Anfangs-, bzw. des Endzustands.

Betrachten Sie ein Wasserstoffatom, welches sich zu Beginn im Grundzustand befindet. Dieses wechselwirkt in einem endlichen aber beliebig großen Volumen $V$ mit einem elektromagnetischen Feld der Form $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}_0 \cos(\mathbf{K}\cdot\mathbf{r} - \omega t), \Phi(\mathbf{r}, t) = 0.$

(a) Untersuchen Sie den Prozess, dass das Elektron durch die Wechselwirkung aus dem Atom herausgeschlagen wird und als freies Teilchen mit dem Impuls $\mathbf{p}_f$ beschrieben werden kann. Zeigen Sie, dass für diesen Prozess die Rate in SI-Einheiten durch

$$R_{i\to f} = \frac{32\pi^2 q^2 a_0^3 |\mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{p}_f|^2}{V m_e^2 \hbar\, [1 + (p_f a_0/\hbar)^2]^4}\, \delta(E_f - E_i - \hbar\,\omega) \tag{2}$$

gegeben ist. Hier sind $q$ und $m_e$ die Ladung und Masse des Elektrons und $a_0$ ist der Bohr'sche Radius. Vernachlässigen Sie dabei den $\mathbf{A}^2$-Term im Hamilton-Operator und nehmen Sie $|\mathbf{K}|a_0 \ll 1$ an.

(b) Zeigen Sie anschließend, dass die Rate für den Übergang des Elektrons in einen Zustand mit einem beliebigen Impuls durch

$$R_i = \frac{8 a_0^3 q^2 p_f^3 |\mathbf{A}_0|^2}{3 m_e \hbar^4 [1 + (p_f a_0/\hbar)^2]^4}, \tag{3}$$

mit $p_f = \sqrt{2m_e(E_i + \hbar\omega)}$ gegeben ist.

(c) In SI-Einheiten berechnet sich der zugehörige Wirkungsquerschnitt $\sigma$ gemäß

$$\sigma = \frac{2}{\omega^2 \varepsilon_0 c |\mathbf{A}_0|^2}\, \hbar\omega\, R_i. \tag{4}$$

Dabei ist $\varepsilon_0$ die elektrische Feldkonstante und $c$ ist die Lichtgeschwindigkeit. Bestimmen Sie $\sigma$. Geben Sie außerdem eine Formel für den Wirkungsquerschnitt in Einheiten von $\pi a_0^2$ als Funktion von $\hbar\omega$ in Einheiten von Ry an und zeichnen Sie diese in einem geeigneten Bereich.

8. Übung TPV WS12/13

**Aufgabe 18 (8 Punkte):** *Zeitabhängige Störungstheorie*

Betrachten Sie einen eindimensionalen harmonischen Oszillator der Frequenz $\omega_0$, welcher für Zeiten $t < 0$ in seinem Grundzustand ist. Für Zeiten $t \geq 0$ wird der Oszillator durch eine harmonische Kraft

$$F(t) = F_0 \cos \omega t \tag{5}$$

angetrieben. Die Stärke $F_0$ und die Frequenz $\omega$ sind dabei konstant. Behandeln Sie diesen Antrieb störungstheoretisch und berechnen Sie die Auslenkung $\langle \hat{x}(t) \rangle$ mit Hilfe der ersten Ordnung der zeitabhängigen Störungstheorie. Diskutieren Sie Ihr Ergebnis.

Vorlesung: Di. um 8:30 Uhr – 10:00 Uhr in EW 203,
Do. um 8:30 Uhr – 10:00 Uhr in EW 203.

Scheinkriterien:

- Mindestens $50\%$ der schriftlichen Übungspunkte.
- Regelmäßige und aktive Teilnahme in den Tutorien (u.a. mindestens einmal vorrechnen).

Sprechzeiten:

| **Name** | **Tag** | **Zeit** | **Raum** | **Tel.** |
|---|---|---|---|---|
| Prof. Dr. Harald Engel | Mi | 14:30 – 16:00 Uhr | EW 738 | 79462 |
| Mathias Hayn | | nach Vereinbarung | EW 711 | 27884 |
| Wassilij Kopylov | | nach Vereinbarung | EW 705 | 26143 |
| Jan Totz | | nach Vereinbarung | EW 627 | 27681 |